CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31-20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31-20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Wiskunde en praktijk in historisch perspectief

Syllabus

G. Alberts

ISBN 90 6196 446 6
NUGI-code: 811

Printed in the Netherlands

VOORWOORD

Toegepaste wiskunde wordt zelden in een historisch perspectief geplaatst. Er zijn verschillende bijdragen aan de geschiedenis van de toegepaste wiskunde. Enkele behandelen het wiskundig modelleren. Telkens worden deze onderwerpen besproken alsof het denkbeeld zelf van een toegepaste wiskunde duidelijk en onveranderlijk is. Toegepaste wiskunde is zelf het resultaat van een historische ontwikkeling. Sterker nog, ik meen dat het idee van toegepaste wiskunde resultaat was van zo'n ontwikkeling en inmiddels weer is verdwenen, althans opgenomen in de meer algemene notie van wiskundig modelleren.
Toegepaste wiskunde en wiskundig modelleren zijn niet zomaar denkbeelden, ze staan voor bepaalde manieren van doen, voor bepaalde manieren waarop de wiskunde betrokken wordt op de werkelijkheid. We vinden die manieren terug in gewoontes, instellingen en opleidingen. Zo horen de opkomst van het wiskundig modelleren in het midden van deze eeuw en de instelling van de wiskundig ingenieursopleidingen bij elkaar. We kunnen het ene verschijnsel niet zonder het andere begrijpen.
Dit boek is een poging de historische achtergronden van de wiskundig ingenieursopleiding te belichten.
Dit boek wil een aanzet geven tot een echt historische belichting van toegepaste wiskunde, dus nu eens niet het denkbeeld van toepassen als vaststaand aannemen, maar dat idee zelf in de tijd plaatsen. Daartoe is een ruimer toneel gekozen dan "toegepaste wiskunde", namelijk de verhouding tussen wiskunde en praktijk. Ten eerste is binnen die verhouding de veranderlijkheid zichtbaar te maken van opvattingen van wiskunde en van toepassen; ten tweede voltrok zich met de aflossing van toegepaste wiskunde door wiskundig modelleren juist in die relatie tussen wiskunde en praktijk een wezenlijke omslag. Het kader van beschouwing, "Wiskunde en praktijk in historisch perspectief", is dus niet toevallig zo gekozen: hier gebeurde het.

WISKUNDE EN PRAKTIJK IN HISTORISCH PERSPECTIEF is ontstaan bij de voorbereiding van het college UT 163111 'Geschiedenis van de wiskunde', doctoraal-keuzevak voor studenten wiskunde aan de Universiteit Twente, voor de vakgroep geschiedenis van de faculteit WMW gegeven door Gerard Alberts (KUN) met medewerking van Jan Schut (UT).
WISKUNDE EN PRAKTIJK IN HISTORISCH PERSPECTIEF bestaat uit twee delen: 1. Syllabus (CWI Syllabus 37); 2. Reader (CWI Syllabus 38). In het college wordt de set van reader en syllabus in combinatie gebruikt.

De studenten en andere lezers ben ik dankbaar voor hun commentaar op eerdere versies van deze tekst. Voor verdere reacties houd ik mij aanbevolen. Het zijn stappen op weg naar dat boek dat "toegepaste wiskunde" als historisch fenomeen belicht.

Amsterdam, zomer 1994 — Gerard Alberts

INHOUD

1. WISKUNDE EN PRAKTIJK 5
   1.a Timman 8
   1.b Stevin 10

2. RENAISSANCE, MATHEMATISERING, VERLICHTING 13
   2.a Renaissance 13
   2.b Verlichting 16
   2.c Mathematisering 18

3. ZUIVERING VAN DE WETENSCHAP - EMANCIPATIE VAN DE WISKUNDE 23
   3.a Lagrange en de paradoxale uitkomst van de Verlichting 25
   3.b Scheidslijn 28

4. 150 JAAR TOEGEPASTE WISKUNDE 31
   4.a Onderzoek en wiskunde in Nederland in de 19e eeuw 33
   4.b Toegepaste wiskunde 36
   4.c 150 jaar ongeduld 41

5. 150 JAAR MATHEMATISERINGSSTREVEN 43
   5.a Tellen en schematiseren 43
   5.b Tinbergen 46

6. VAN THEORIE NAAR MODEL 51
   6.a De blokkade van Boltzmann 52
   6.b Het beeld van Hertz 54
   6.c De mathematische voorbeelden van Burgers 59

7. BASISVAK OF HULPWETENSCHAP: WISKUNDE IN DELFT 61
   7.a De onderwereld van Biezeno 62
   7.b Zeggenschap over de propaedeuse 66
   7.c Mathematisch Ingenieur 70

8. WISKUNDIG MODELLEREN 73
   8.a Modelleren als activiteit 75
   8.b Timmans opleidingsplan 80
   8.c Varianten op weg naar de opleiding in wiskundig modelleren 84

9. WISKUNDE ALS TECHNIEK 89
   9.a Instrumentele wiskunde 89
   9.b Wereldbeeld 92

10. EPILOOG: ZUIVER EN TOEPASSINGSGERICHT 95

LITERATUUR 96

1. WISKUNDE EN PRAKTIJK

kan wiskunde praktisch zijn?

Wanneer een wiskundig ingenieur als besliskundige een route-planning-systeem voor een transportbedrijf heeft ontwikkeld en de computer levert netjes dagelijks de optimale routes en opeenvolgingen van adressen af, maar chauffeurs volgen hun eigen omweg - misschien omdat ... -, dan heeft zij een implementatie-probleem. Toen Simon Stevin in 1590 een molen had ontworpen met een sterk verbeterd rendement en de as liep telkens uit de lagers, had hij een implementatie-probleem. De afstand tussen theorie en praktijk laat zich niet zomaar overbruggen, zeker niet wanneer die theorie wiskundig van aard is. Wiskunde is helemaal geen praktische bezigheid.

Het strookt niet met de gebruikelijke opvattingen over wiskunde, dat het een zelfstandig ingenieursvak zou kunnen zijn. Wiskunde zou wel een zelfstandig vak kunnen zijn, maar dan van de wereld afgewend. Wiskunde wordt enerzijds voorgesteld als een abstracte wetenschap, door haar abstractie vrij en autonoom. Anderzijds kan zij wel ten dienste van de techniek staan, maar dan als hulpwetenschap, onzelfstandig. Tussen die beide opvattingen lijkt er geen plaats te zijn voor de Wiskundig Ingenieursopleiding als apart vak. De creatie van Reinier Timman is evenwel een levensvatbare gebleken. De opleiding is gestart in 1956 en bestaat nog.
Het thema van deze syllabus is de verhouding tussen wiskunde en praktijk. De opzet is om de historische ontwikkeling van deze relatie na te gaan. Het doel is een beter begrip van de hedendaagse wiskunde en van het Wiskundig Ingenieurswerk in het bijzonder.

periodisering

In de zeventiende eeuw was er iets dat men praktische wiskunde noemde en in de twintigste eeuw opnieuw. De betekenis van de uitdrukking is na drie eeuwen echter totaal verschillend. In de tijd van Stevin, en eigenlijk al vanaf Fibonacci, was praktische rekenkunde koopmansrekenen en praktische meetkunde was landmeten. In de twintigste eeuw was praktische wiskunde aanvankelijk het harde rekenwerk in de toegepaste mechanica dat mede aan de wieg stond van de informatica; later werd de term gebruikt door wiskundigen in de sfeer van de industriële wiskunde. In de tussenliggende eeuwen is de verhouding tussen wiskunde en praktijk volkomen veranderd. Het beeld van de wiskunde en van de onderdelen van het vak is totaal gewijzigd en zelfs wat er met praktijk bedoeld wordt, verdient nader onderzoek. Hieronder volgt een heel grove historische schets, eindigend met een voorstel tot periodisering.

Praktische wiskunde was aanvankelijk het praktizeren, het uitoefenen, van de wiskunde - althans van een van de wiskundige wetenschappen. Men bracht het geleerde rechtstreeks in de praktijk, wellicht met een ander voorbeeld maar in principe zonder aanpassing. Het praktizeren van wiskundige wetenschappen kan in zekere zin vergeleken worden met het uitvoeren van een muziekstuk. De wiskundigen maakten hun wetenschap ten nutte door haar simpelweg uit te oefenen. Aan de ene kant was dit een zeer beperkte opvatting van het bruikbaar maken van het vak, het uitoefenen zonder meer. De relatie wiskunde-praktijk was hier nog niet doordacht. Aan de andere kant was de opvatting van wat wiskunde behelsde veel ruimer dan tegenwoordig. Zo vatte Descartes naast rekenkunde en meetkunde, de studie van astronomie, toonleer, optica, "kortom al die zaken waar het gaat om orde en maat" onder de mathesis universalis. De beoefenaars van deze kundes werden wel praktizijn genoemd, in het Engels practitioner.
De verhouding wiskunde-praktijk was die van uitoefening. De periode die door deze verhouding gekarakteriseerd kan worden is die tot 1800.

Rond 1800 kregen de aanzetten tot zuivere wiskunde hun definitieve vorm. Zuivere wiskunde betekende ongemengde wiskunde, onvermengd met metafysische of empirische begrippen, niet aangelengd bovenal met onzuivere redeneerstappen. Hier liggen de wortels van idee dat de oplossing van het vierkleurenprobleem met behulp van een computerprogramma eigenlijk niet helemaal deugt. Nu was de ongemengde wiskunde natuurlijk nogal onpraktisch, men pretendeerde haar bruikbaar te maken door toepassing: applicatie van algemene wiskundige inzichten op bijzondere toestanden. Het idee bij toegepaste wiskunde is, dat in de zuiver gehouden wiskunde structuren klaarliggen om ingevuld te worden bij praktische behoeften - een letterlijk niet erg praktisch idee. Van 1800 tot 1950 is toegepaste wiskunde het beeld geweest van de verhouding wiskunde-praktijk. De veronderstelde verhouding was die van applicatie, toespitsen en invullen van algemene inzichten in bijzondere gevallen.

Sinds 1950 is het wiskundig modelleren gemeengoed: het in de wiskunde uitbeelden van hetgeen men denkt van een gegeven situatie. Von Mises en Timman zijn in het veld van de technische wetenschappen belangrijke mensen geweest in het doorbreken van het idee van toegepaste wiskunde. De een gaf een essentiële voorzet, de ander ronde de Nederlandse ontwikkeling in de richting van een technische wiskunde af.

Met de begrippen praktische wiskunde, toegepaste wiskunde en wiskundig modelleren kunnen we de moderne geschiedenis in drie periodes indelen met het oog op de ontwikkeling van de verhouding wiskunde-praktijk. Het is een grof schema, het biedt wel een eerste houvast om saillante punten te herkennen.

tijdvak	karakteristiek	verhouding tussen wiskunde en praktijk
1400-1800	praktische wiskunde	uitoefenen, verschil niet expliciet
1800- 1950	toegepaste wiskunde	applicatie, benaderen
1950- heden	wiskundig modelleren	beeld aanreiken, uitbeelden in wiskunde

1.a Timman

Wiskundig Ingenieur - wiskundig modelleren

Onze tijd is die van het wiskundig modelleren en de Wiskundig Ingenieursstudie aan de (Technische) Universiteiten leidt daarin op. Het wiskundig modelleren is evenwel zo'n algemene en verbreide techniek - er zijn hele wetenschappen als bedrijfs- en bestuurskunde op gebaseerd -, dat de Wiskundig Ingenieursopleiding er bepaald geen exclusieve rechten op heeft.

Reinier Timman had aerodynamisch onderzoek gedaan aan het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, NLL, voordat hij in Delft hoogleraar wiskunde werd in 1952. Het idee van een praktijkgerichte opleiding in de wiskunde hing in de lucht, het was al eens geopperd en Timman werd beschouwd als de man die het idee werkelijkheid kon laten worden. Na vier jaar commissies, vergaderingen en memoranda was het zo ver. In 1956 startte de afstudeerrichting opleidend tot Wiskundig Ingenieur.

van "de theorie" naar "wiskundig model"

In het aerodynamisch onderzoek, waarin Timmans ervaring lag, had men de gewoonte om te spreken van "de theorie" waar het ging om de mathematisch geformuleerde samenhang die onderzocht moest worden, in concreto: waaraan gerekend moest worden. Tegenwoordig zouden we zeggen "het wiskundig model" en in zijn inaugurele rede deed Timman dat ook al, maar de rapporten van het NLL vermeldden nog "de theorie".

Er werd wel windtunnel-onderzoek gedaan in het NLL, maar Timman er in een sectie waar bijna uitsluitend gerekend werd: flutteronderzoek, draagvlaktheorie e.d. Trilt een vliegtuig in eigentrilling dan valt het uit elkaar. Juist rond de geluidssnelheid verandert de trillingskarakteristiek van een vliegtuig-met-luchtlaag sterk en daarom wil men graag vantevoren weten wat in dat domein de eigenwaarden van de trillingsfrequentie zijn, opdat er geen machines uit de lucht vallen. Dat was het probleem waar Timman aan rekende, nadat hij er eerst een puur mathematische behandeling van had gegeven in zijn proefschrift. Te rekenen viel er nog niet zoveel en het kwam erop aan de problemen zo eenvoudig voor te stellen dat het rekenwerk doenlijk bleef en de uitkomsten veelzeggend. Daarin slaagde Timman door ongebruikelijke model-aannames. Gebruikelijk was het in dit type problemen om zaken te lineariseren, dat wil zeggen in de reeksontwikkeling van een benaderende functie werden meteen alle factoren met de variabele in een macht van twee of hoger verwaarloosd. Zonder dergelijke ingrijpende vereenvoudiging was het rekenwerk, dat in de jaren 1940 op elektro-mechanische apparaten werd gedaan, niet doenlijk. Timman pakte de zaken anders aan en stelde hij de zaak niet-lineair maar eendimensionaal voor.

de techniek eist antwoord

Aan deze ervaring verbond Timman consequenties:

"Wat is nu de zin van dergelijke beschouwingen, die ook zelfs een toegepast mathematicus niet kunnen bevredigen? Het antwoord is duidelijk: "beter een half ei dan een lege dop". Het beter althans enige kennis te bezitten, en, dit is belangrijk, deze met beleid te interpreteren, dan in het geheel niet. De techniek stelt vragen en eist daarop een antwoord, de toegepaste wiskunde kan niet anders doen dan de problemen met "third degree"-methoden aan te vallen, om de gewenste resultaten te verkrijgen, maar moet zich dan ook realiseren, dat zij met het trekken van conclusies uit op deze wijze verkregen resultaten uitermate voorzichtig moet zijn."

"Waar de extreme vorm van de strenge mathematische critiek verstek laat gaan, omdat zij niet anders kan doen dan alles onaanvaardbaar te verklaren, moet een op ervaring gebaseerde vorm van critiek aanwezig zijn, die het ene resultaat wel, het andere niet geloofwaardig acht en die alleen verkregen kan worden, als de beoefenaar van dit vak behalve een omvangrijke kennis van de te gebruiken mathematische methoden ook een fundamenteel inzicht heeft in de physische verschijnselen, waarop de wiskunde wordt toegepast.

Dit inzicht is al direct nodig bij het eerste stadium van onderzoek, n.l. bij de omzetting van het technische probleem in mathematische taal."[Timman 1952: p. 15]

geloofwaardigheid

Geloofwaardigheid in plaats van zoeken naar waarheid, Timman is niet zuinig met zijn consequentie.

1.b Stevin

grensvlak van wiskunde en techniek

Het hout was te zacht, beweerde Stevin, waarmee men de door hem ontworpen molen te IJsselstein uitgevoerd had. Dat wilde de baljuw nog wel eens zien. Prinsessen en advocaten kwamen eraan te pas en het conflict zou zich drie jaren voortslepen, tot groot ongenoegen van Stevin die vreesde voor zijn reputatie, en tot ongenoegen van de boeren wier land onvoldoende bemalen werd.
Simon Stevin (1548-1620) bouwde de zeilwagen voor prins Maurits, schreef *De Thiende* en liet het woord wiskunde na. Belangrijk - een erflater - is hij vanwege zijn werk op het grensvlak van wiskunde en techniek. Stevin liet zich nu eens mathematicus noemen, dan weer ingenieur, hij was daarenboven ondernemer. Samen met de Delftse burgemeester Jan de Groot, vader van Hugo de Groot, vroeg hij enerzijds octrooien aan op verschillende van zijn vindingen en nam hij anderzijds de bouw en reparatie van molens, naar zijn gepatenteerde ontwerp, aan. Zo gebeurde het ook in IJsselstein.
Op 8 april 1589 sloot De Groot een contract met vertegenwoordigers van de polder Leege Biesen, Achtersloot, Meerloo en het Brouck in het land van IJsselstein om nog in datzelfde jaar een molen te leveren van hout en ijzer die minstens zoveel water zou afvoeren als twee van de beste molens in de omgeving. Afwateringsmolens met het drie- tot viervoudige van de tot dan toe gebruikelijke capaciteit, dat was de specialiteit van Stevin en De Groot. Het ontwerp onderscheidde zich door bijzonder grote schoepen, een iets gewijzigde overbrenging en een laag draaitempo.
De IJsselsteinse molen werd niet voor die winter, maar pas in juni van 1590 opgeleverd. De ernstige problemen begonnen echter pas daarna. De molen lag vaak stil en de polder werd niet goed drooggehouden. Gebruikelijk was dat de betaling van een molen in termijnen geschiedde, in dit geval bij afsluiting van het contract, bij oplevering en vervolgens een jaar en twee jaar na oplevering. Gebruikelijk was ook dat de molenbouwer verantwoordelijk bleef voor het onderhoud van de tandwielen, notoir zwak punt van de molens. Het conflict ontspon zich, toen de Baljuw van IJsselstein weigerde de vierde termijn te voldoen. Stevin ging kijken en beschuldigde de IJsselsteiners van sabotage en wanbeheer. Hij begon getuigenissen te verzamelen uit andere plaatsen ten bewijze van de deugdelijkheid van zijn ontwerp. De Groot deed zijn beklag bij Prinses Maria van Nassau en pas nadat zij ten tweeden male de baljuw onder druk had gezet accepteerde deze in 1594 arbitrage door een commissie van vijf advocaten, resulterend in betaling van de vierde termijn met aftrek van reparatiekosten.

Het probleem zat inderdaad in het hout. Het schijnt dat de lagering van de molenspil niet goed functioneerde: het onderijzer zonk weg in de onderkant van de spil [dit is de grote verticale as in de molen die de kracht overbrengt van de wiek-as naar de as van het scheprad; het onderijzer steekt in de spil en draait in een ijzeren kom]. De andere kant van het verhaal, maar die werd in het conflict

minder duidelijk, was dat Stevin door zijn nieuwe ontwerp het mechaniek van de molen vele malen zwaarder belastte dan tot dan toe gebruikelijk was.
Het wonderlijke van deze gebeurtenissen was dat Stevin aan die belasting rekende en de eerste was die dit deed. Hij was de eerste die met enige kwantitatieve onderbouwing had kunnen inzien dat die belasting zo zwaar werd. En vanwege die mogelijkheid, waar hij dus gebrekkig gebruik van maakte, is Stevin voor ons zo belangrijk.

theoretiseren in het perspectief van praktijk

Simon Stevin heeft zelf zijn berekeningen aan molens niet gepubliceerd; zijn zoon Hendrik heeft een deel van de aantekeningen uitgegeven, eind 19e eeuw werd het geheel teruggevonden en in 1884 door Bierens de Haan uitgegeven. Het manuscript "Van de Molens" was een onaf produkt en juist daardoor geeft het een inzicht in Stevins werkwijze.
"Van de Molens" was een vroeg voorbeeld van theorievorming vanuit de praktijk en toepassing van theorie in de praktijk. Eenvoudig was het niet. Stevin geloofde wel in het belang van theorie, maar dan precies theorie in het perspectief van daet, de praktische toepassing, getuige het voorwoord waarmee hij in 1586 *De Weeghdaet* op de *Beghinselen der Weeghconst* liet volgen:

> "Geliict onnutte cost waer, een groote stercke grondt te leghen, die een swaer ghesticht draghen can, sonder eintlick eenich ghebau daerop te willen brenghen; Alsoo is de spiegheling inde beghinselen der consten verloren arbeydt daer t'einde totte daet niet en strect. Ghelijck oock na de natuerlicke oirden, dien grondt voor t'opperghebau gaedt, alsoo dese spiegheling voor huer daet."[Stevin 1955: I p. 292]

Stevin heeft zich in verdergaande speculaties begeven, dan men hieruit zou mogen afleiden. Belangrijk is dat hij als rechtvaardiging van theorie slechts wijst op praktisch nut. Dat zulk nut niet onmiddellijk volgt, laat het manuscript *Van de moolens* zelf ook zien. Feit is dat Stevin stelselmatig gegevens van een negentiental molens had verzameld, waaronder een zestal van het "nieuwe type", dat wil zeggen naar zijn ontwerp. En uit dit geheel moest de voortreffelijkheid van zijn ontwerp blijken. Ondanks de hier curieuze "more geometrico" weergave in het manuscript, de gegevens - oorspronkelijk zonder aanduiding van dimensies opgesomd - gevolgd door een "proef", blijft de theorievorming geheel impliciet.

molen-theorie blijft impliciet

Zichtbaar is slechts de verhouding tussen het aantal omwentelingen van de wieken en dat van het scheprad en de benadering van dit verhoudingsgetal door de deling van de aantallen tanden van de tandwielen in de overbrenging. De achterliggende theorie moet geweest zijn, dat Stevin uit het gewicht van het water de neerwaartse druk in het zwaartepunt van een compartiment water bepaalde en daaruit het moment van dit water op de as van het scheprad. Dit moment moest geleverd worden door de wieken. De gemiddelde druk van de wind op de wieken was kennelijk aan Stevin bekend - dit had hij kunnen afleiden uit de verhoudingen in de bestaande molens; maar het concept winddruk was niet zomaar voorhanden! -, en zo kon hij eenvoudig bepalen hoeveel slagen de wiek-as zou moeten maken

tegenover de scheprad-as. Door eenvoudig uitproberen bepaalde hij tenslotte de aantallen kammen en staven op de tandwielen. Wrijving speelde in deze theorievorming kennelijk geen rol, trillingen evenmin en krachten werkzaam in het mechanisme al helemaal niet; dat laatste brak hem klaarblijkelijk op in de IJsselsteinse molen. Stevin had over de ideale vorm van kammen en staven geschreven, beseffend dat het feit dat deze gemeenlijk elkaar slechts op één punt raakten, oorzaak was van veel slijtage. Stevin kon berekenen welke druk er, statisch gezien, op de kammen en staven stond. Toch vergrootte hij onbekommerd de krachten werkzaam in het overbrengingsmechanisme van de molen. Zijn theorievorming, voor zover men daarvan spreken mag, bleef niet alleen impliciet, ze maakte sterk idealiserende aannames, ze pleegde bovendien met haar statische beschouwingen een belangrijke reductie. We doen er beter aan in het geheel niet van theorievorming te spreken. In ieder geval is hier geen theorie die om het zo te zeggen als gietvorm diende waar de praktijk ingegoten werd.
Toch is het volstrekt duidelijk dat Stevin precies wist wat hij deed. Hij kende, nog altijd impliciet, de structuur waarbinnen de gegevens pasten die hij opsomde en rekende ook slechts zodra die gegevens compleet waren. Via deze structuur had hij greep op het verschijnsel: mathematisering.
De gegevens noteerde hij in keurige systematiek, en voorzover hij de gegevens compleet achtte, rekende hij. Geen symbolen, geen variabelen, gewoon getallen in vaste structuur genoteerd. Deze structuur bleef echter impliciet, opgevouwen in het hoofd van Stevin.

2. RENAISSANCE, MATHEMATISERING, VERLICHTING

2.a Renaissance

Arabische wiskunde

Je fokt konijnen. Als nu a) elk paar konijnen elke maand één nieuw paar voortbrengt dat zichzelf vanaf de tweede maand weer begint voort te planten, en b) geen enkel konijn sterft, hoeveel paren konijnen heb je dan na één jaar als je met een enkel paar begonnen was.
Dit was het vraagstuk dat de beroemde getallen van Fibonacci als oplossing had: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., de rij die wordt verkregen door telkens de voorgaande twee termen op te tellen. Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, was met zijn boeken *Liber Abaci* (1202), waarin het konijnenvraagstuk voorkwam, en *Practica Geometriae* (1220) de eerste Europese wiskundige die wezenlijk nieuwe elementen toevoegde aan de overgeleverde Arabische kennis van wiskunde.

koopmansboeken

De Middeleeuwen waren niet zo duister als sommige geschiedenisboeken leren. De periode van 500 tot 1500 was qua mentaliteit wel radicaal tegengesteld aan het "Verlichte" tijdperk erna, maar om hem dan maar duister te noemen berust op een misverstand. De ingenieurskennis van Vitruvius (-90 tot -10) werd zowel door de Romeinen, als door de Middeleeuwers onderhouden. Gezien vanuit de geschiedenis van de wiskunde zoals we het vak tegenwoordig opvatten, zijn de Middeleeuwen niet zozeer duister, als wel blanco. Vanuit het perspectief van de praktische wiskunde was er echter wel degelijk enige continuïteit.
Binnen de continuïteit is het thema van wiskunde en praktijk aan te wijzen, waar enige inbreng van wiskunde in handel en techniek zichtbaar werd. Met de groei van verkeer en handel in de latere Middeleeuwen kwam de geldhandel op, ten koste van de ruilhandel. Munten werden nog wel gewogen, maar vooral geteld. Verder moest er stukprijs berekend worden, waren rente en accijns te bepalen, en moest de koopman zijn kas bijhouden. Het rekenen was het werk van rekenmeesters, accijnsmeesters en kooplieden. Zij waren onderdeel van de opkomende burgerij. Hun vaardigheid in het rekenen verbreidde zich onder de burgers. Met Sombart karakteriseert Struik de mentaliteit van de emanciperende burgerklasse als "Rechenhaftigkeit": vaardig en gretig in het rekenen, [Struik 1990: p. 113]. Het tellen en rekenen gebeurde op telborden (zie fig 1.), met de traditionele aanschouwelijke additieve weergave van aantallen. Een telbord werkte, als een abacus, met eenheden, vijftallen, tientallen, vijftigtallen enzovoorts, aangegeven

met penningen op de lijnen van een bord. Dit rekenen heette daarom ook wel rekenen "op de lijn". Het alternatief heette rekenen met de pen, "op de veder".

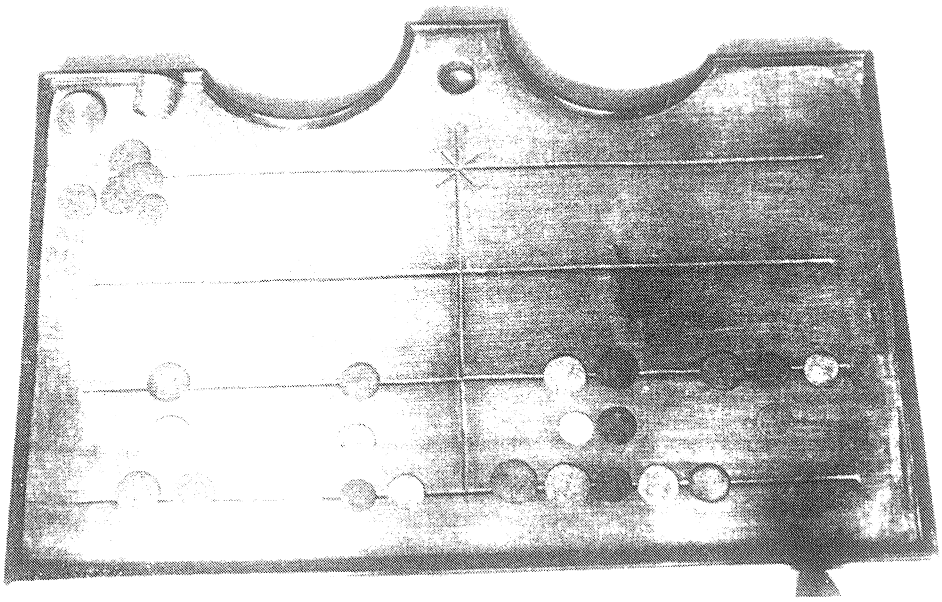


fig. 1: Middeleeuws telbord (reconstructie) met originele rekenpenningen
bij telborden paste notatie in Romeinse cijfers

De resultaten van rekenen op het telbord werden in Griekse notatie opgeschreven, dat wil zeggen in Romeinse cijfers. Die notatie is additief. Vindt men in oude koopmansboeken de lijsten en de kas in Romeinse cijfers, dan is er zeker gewerkt met een telbord. Struik vond in de archieven Italiaanse kasboeken, die vrij nauwkeurig een omslag te zien geven van Romeinse naar Arabische cijfers, en dus van telbord naar geschreven getallen, in de eerste helft van de vijftiende eeuw [Struik 1990: p. 111].

van aantal naar getal

In de Arabische cultuur was een andere, naar men zegt van oorsprong Hindoe, schrijfwijze van getallen gebruikelijk: het positiestelsel, onderscheiden symbolen voor het aantal 0, ..., 9, van (naar gelang de plaatsing) eenheden, tientallen, honderden etcetera. Dit is de nu nog gebruikelijke notatie. De Hindoe-Arabische schrijfwijze geeft getallen - en niet zoals de Griekse aantallen - en ze leent zich veel beter voor wiskundige beschouwingen. De aflossing van de ene schrijfwijze door de andere voltrok zich heel snel. Het betekende niet alleen verandering van schrijfwijze, maar ook van rekenwijze, zelfs van opvatting van hoeveelheden (van aantallen naar getallen), met als gevolg een veel wiskundiger opvatting van de handel. Het gebruik van getallen in handel en boekhouding, betekende dat deze gebieden domeinen werden waarop de arithmetiek betrekking had. Het ging niet langer om een calculus, een techniek van rekensteentjes leggen op een telbord, maar om een algebra. Tot het geheel van de rekenkennis behoorde niet alleen het concrete telwerk voor de handel, de rekenmeesters verwierven en verbreidden ook de kennis van het oplossen van vergelijkingen: de regel van drie en de regel coss. De receptie van de wiskundige kennis uit de Islamitische cultuur verliep zeer geleidelijk, van 1000 tot 1400, en daarin was Fibonacci rond 1200 een van de groten. De introductie van deze wiskunde in de commercie voltrok zich daarentegen bijzonder snel.

Omgekeerd had deze introductie tot gevolg dat het boekhouden voluit een wiskundig probleem kon zijn. Pacioli behandelde het in zijn in 1494 verschenen *Summa de Arithmetica Geometrica Proportione & Proportionalitá.* Pacioli's boek was een van de eerste gedrukte wiskunde-boeken. Het was een poging de hele wiskunde van dat moment, in het Italiaans (!), weer te geven en bevatte ook een uiteenzetting van het "Italiaans" of "dubbel" boekhouden. Na Pacioli leverde Simon Stevin een belangrijke bijdrage aan het boekhouden en de verbreiding ervan [Waal 1927]. Op vergelijkbare wijze trok Stevin de lijn van de Hindoe-Arabische notatie door naar de positionele schrijfwijze van tiendelige breuken in zijn pleidooi *De Thiende leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den menschen noodich vallende afveerdighen door heel ghetallen sonder ghebroken* in 1585 [Stevin 1955: II].

receptie van Arabische kennis in de landstaal

Het landmeten, het wijnroeien, de schilderkunst beleefden in de Renaissance een soortgelijke plotselinge introductie van nieuwe kennis gebaseerd op een geleidelijk geabsorbeerde Arabische kennis van de meetkunde. Driehoeksmeting, infinitesimaalgeometrie en perspectiefleer kwamen eruit voort. De introductie van het perspectief in de schilderkunst was niet minder snel en zeker niet minder revolutionair dan de veranderingen in het boekhouden. De universiteit van Bologna was de plaats waar de via de Islamitische cultuur en naar aanleiding daarvan ook rechtstreeks gerecipieerde klassieke wiskunde verder werd uitgewerkt. Het was het centrum van de wiskunde-beoefening in Europa gedurende de vijftiende eeuw, het was een van de cultuurcentra van de Renaissance. Pacioli, Dürer (perspectief) en later Copernicus studeerden er.

De omwenteling van rekenen, tekenen en techniek door de inbreng van de wiskunde was het directe gevolg van de Renaissance voor de cultuur van de burgerij. De verwerking gebeurde in de landstaal en goeddeels in de vorm van nuttige technieken. Het was primair in deze traditie dat Stevin stond. Het was dit gedachtengoed dat hij expliciet maakte met zijn pleidooien voor het Nederlands, voor De Thiende en met zijn reflectie over Spiegheling en Daet.

2.b Verlichting

omslag; revolutie

Copernicus' vak, de sterrekunde, stond in een andere traditie en een andere sociale laag en een andere taal, dan de praktische reken- en meetkunde (Copernicus 1473-1543). De astronomie behoorde tot de hofcultuur, werd in het Latijn bestudeerd en de rekentechnieken waren niet die van de rekenmeesters. De revolutie in de sterrekunde, de Copernicaanse revolutie het zonnestelsel niet met de aarde in het middelpunt voor te stellen, was anders van karakter dan de bovengenoemde omslag. Het speelde zich af in de elite-cultuur, het was abstract en deed een veel directer beroep op de meetkunde en het was voor de mensen in de tijd zelf een omwenteling. Hier was een aanwijsbare zegetocht van de meetkunde.
Galilei (1564-1642) liet in zekere zin beide stromen samenkomen met zijn studie van de valwetten. Hij zocht uitdrukkelijk naar een wiskundige formulering van het als wetmatig voorgestelde gedrag van vallende stenen. Hij vond niet de correcte valwet, zoals zijn tijdgenoot Stevin ook niet helemaal tot de volledige en correcte kennis van de molen kwam, maar de niet te overschatten stap die hij zette was om niets anders te zoeken dan een mathematisch te formuleren samenhang. Die verandering van blik op de wereld noemt men de Galileïsche omslag.

mathematische principes

Newton (1642-1727) zou de natuurkundige theorievorming vervolmaken in zijn *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687. De titel van dat werk geeft bijzonder pregnant de rol van de wiskunde weer, namelijk de principes van de natuurfilosofie te leveren. Descartes (1596-1650) had al even eerder de rol van het wiskundig denken tot een in het algemeen heilzame verklaard.

> "..... want die methode, die men met een vreemd woord algebra noemt, ... schijnt die helderheid en dat gemak te bezitten, die je moet aantreffen in de ware wiskunde. Toen deze gedachten me geleid hadden van het bestuderen van de rekenkunde en de meetkunde in het bijzonder naar de algemene bestudering van de wiskunde, heb ik eerst onderzocht wat iedereen precies onder dat woord verstaat en waarom men niet alleen beide genoemde wetenschappen als een deel van de wiskunde beschouwt, maar ook de muziek, de optica en de mechanica en nog veel meer vakken. ....
>
> **orde en maat**
>
> En toen ik er beter over nadacht, viel het mij op dat alleen al die dingen waarin men orde en maat bestudeert tot de wiskunde gerekend worden. Het doet er daarbij niet toe, of die maat gezocht wordt in getallen, figuren, sterren, klanken of een ander object. Zo merkte ik op dat er een algemene wetenschap moet zijn, die alles uitlegt wat men kan onderzoeken met betrekking tot orde en maat, zonder toepassing op een bepaald onderwerp, en dat die wetenschap, niet met een vreemde, maar met een oude welbekende naam, Mathesis Universalis wordt genoemd, want ze omvat alles waarom de andere wetenschapppen haar delen

worden genoemd. Wat de ogen opent voor het voordeel en het gemak dat ze de andere wetenschappen die van haar afhangen, meebrengt, is dat ze op al deze dingen en bovendien op nog veel meer toepasbaar is; en dat alle moeilijkheden die zij in zich bergt, ook voorkomen in de die andere wetenschappen maar dan vergezeld van nog veel meer andere problemen die zij niet heeft." [Descartes 1627: p. 39]

geest van geometrie

Descartes verwoordde zijn visie op de rol van de wiskunde als filosofische opvatting. Bernard de Fontenelle canoniseerde die opvatting:

"De geest van de geometrie [dwz het wiskundig denken, ga] zit niet zo vast aan de meetkunde, dat hij er niet van zou kunnen worden losgemaakt en overgebracht naar andere kengebieden. Een boek over ethiek, politiek of over filologie, misschien zelfs een boek over welsprekendheid, wordt er onder gelijke omstandigheden mooier op, wanneer het van de hand van een wiskundige is. De orde, de helderheid, de beknoptheid en de nauwgezetheid die sinds enige tijd in de betere boeken waar te nemen zijn, konden wel eens hun oorsprong vinden in dit wiskundig denken, dat zich meer dan ooit verbreidt, en dat op een of andere manier zelfs op die mensen geleidelijk aan overgedragen wordt die van de wiskunde geen weet hebben. Soms zet iemand de toon voor een tijdperk, een groot man; degene die we met het meeste recht de eer kunnen geven dat hij een nieuwe kunst van oordelen heeft ingevoerd, was een uitmuntend wiskundige." [Fontenelle 1702: p.14]

Het denkbeeld dat de wiskunde profijtelijk is voor de studie van andere zaken, was een van de centrale elementen van de Verlichting, het achttiende-eeuwse rationalisme, le Siècle des Lumières. De Fontenelle (1657-1757) werd vanwege het verwoorden van dit denkbeeld wel de vader van de Verlichting genoemd. Waar Stevin theorie steeds in het perspectief van de praktijk stelde, voegde De Fontenelle er het element van theorie om zichzelf aan toe:

"Het is altijd nuttig correct te denken, zelfs over nutteloze onderwerpen." [Fontenelle 1702: p. 13]

luidruchtige en stille ideologie

Het idee werkte in twee varianten door. De eerste was dat men alles zou moeten modelleren naar de natuurwetenschap, die zelf weer more geometrico was, op de wijze van de wiskunde, namelijk geformuleerd als axioma's en afgeleides daarvan. Dit geloof, deze luidruchtige ideologie van de Verlichting - die uiteindelijk zou uitmonden in de "culte de la raison" tijdens de Franse Revolutie van 1789 -, werd dikwijls op de hak genomen, bijvoorbeeld door Diderot. Dezelfde Denis Diderot (1713-1784) schiep in samenwerking met D'Alembert (1717-1783) echter hèt toonbeeld van de Verlichting, de *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (28 delen 1751-1772). Niet dat daar alles wiskundig verwoord was, integendeel, maar het systematisch uiteenleggen van alles in zijn elementen, is een toonbeeld van mathematiseren: de structuur staat voorop, de inhoud doet er nauwelijks nog toe. Diderot bedreef hier geen

wiskunde, maar hij volgde de geest van wiskunde. Dit idee dat structureren en wiskundig denken uit zichzelf goed is, noem ik de stille ideologie van de Verlichting. Deze stille ideologie vinden we terug bij Monge in zijn uitspraken en in het gegeven van de propaedeuse. Ook hij voltrekt een mathematisering.
Zo kwamen bijna gelijktijdig en in dezelfde stad de luidruchtige ideologie van de Verlichting in de Culte de la Raison en de stille ideologie in de Propaedeuse van het technisch hoger onderwijs tot ontplooiing. De eerste kwam al snel tot ontploffing. De tweede, de wiskundige propaedeuse, weerslag van de stille ideologie, is een rode draad in deze syllabus.

2.c Mathematisering

begrip verhelderen

In de Renaissance en de Verlichting voltrok zich een mathematisering van de natuurwetenschap, maar ook van de techniek. In deze paragraaf proberen we te verhelderen wat er met dat begrip mathematisering precies bedoeld wordt.
Het begrip mathematisering is vogelvrij, toch zijn er verschillende omgevingen waarin er iets mee bedoeld wordt. Vooropgesteld, mathematisering speelt zich af buiten de wiskunde. Er wordt iets "wiskundiger" gemaakt of doortrokken van wiskunde: dat moet dan wel iets buiten de wiskunde zijn. Mathematisering is om te beginnen niet hetzelfde als toepassen (1). Het woord wordt juist gebruikt om te verwijzen naar die invloed van de wiskunde die belangrijker geacht wordt dan de resulterende formule, namelijk haar werkwijze en denkwijze (2). Filosofen en historici, tenslotte, bieden door hun gebruik van de term aanknopingspunten voor een meer inhoudelijke bepaling (3).

Mathematisering 1: dat wat onder het toepassen ligt

Mathematisering is niet hetzelfde als toepassen van wiskunde. Toepassen is de applicatie van een wiskundige passage, een reken- of redeneerstap, een functieverband, kortom een in de wiskunde ingeziene samenhang, op een daarvoor geschikt gemaakt domein. Het stukje wiskunde moet dus passen en het terrein moet geschikt zijn. *Het geschikt maken van het terrein is de eerste notie van mathematiseren.*

> "Voor het platonisme beantwoordde het reële meer of minder volkomen aan het ideële. Dat verschafte de antieke meetkunde de mogelijkheid van een primitieve toepassing op de werkelijkheid. In de mathematisering van de natuur volgens Galilei wordt nu de natuur zelf onder aanvoering van de nieuwe wiskunde geïdealiseerd, de natuur wordt - modern uitgedrukt - zelf een mathematische variëteit." [Husserl 1936: p. 22]

Het domein van toepassen is dus in principe de hele wereld en de uitleg daarbij is niet, dat deze of gene aanname wordt gemaakt "opdat" (bijvoorbeeld opdat men technisch grip krijgt op het domein), maar dat de werkelijkheid zo *is* dat ze zich bij uitstek leent voor de applicatie. Er wordt een ontologische uitleg gegeven,

zonder verwijzing naar mathematisering.
Die ontologische uitleg, echter, is uiteraard een veronderstelling: aangenomen is dat het terrein zo is dat de wiskundige passage zich erop laat plakken, dat wil zeggen zo niet identiek met (Descartes), dan toch inwisselbaar voor (Plato) het wiskundig objectgebied. Welnu, het maken van die aanname is het mathematiseren.

Mathematisering 2: de opdracht

De wiskundigen waren zelf de eersten die het woord gebruikten, zonder precieze inhoudelijke bepaling, maar met een duidelijke teneur: in de eerste plaats om aan te geven dat er bij het toepassen iets belangrijkers speelde dan het in formules zichtbare resultaat; in de tweede plaats om een naam te geven aan de zelf gestelde opgave een nieuw terrein voor de applicatie van wiskunde te ontginnen. Bernard de Fontenelle stelde dat geest van de geometrie wel losgemaakt kon worden en overgebracht naar andere kengebieden. Hij voegde eraan toe dat wiskundigen helderder boeken schreven en dat het wiskundig denken ook mensen die onbekend zijn met de wiskunde beïnvloedde.
Het ging hem dus om het doordringen van het wiskundig denken op ander gebied, en dit was primair een positieve opgave. Zo ook voor de Nederlandse wiskundigen in de twintigste eeuw.
De verwachtingen ten aanzien van de maatschappelijke functie van de wiskunde waren in sterke mate de verwachtingen van de wiskundigen zelf. De taak die zij zichzelf daarbij stelden was "mathematisering". D. van Dantzig (1900-1959) hield in 1927 een pleidooi voor het mathematiseren van waarde-oordelen (vgl. § 8.a). J. Tinbergen (1903-1994) stelde zich in 1929 de taak van een mathematisering van de economische wetenschap (vgl. § 5.b). De term mathematisering had een uitdrukkelijk programmatische strekking. Het argument was dat de beoogde gebieden helderheid, beknoptheid en precisie deelachtig zouden worden.
Mathematisering, zo leert de context van de zelfgestelde opgave, gebeurt buiten de wiskunde. De geest, het denken, de denkwijze, de denkvorm of de wijze van bekijken die de wiskunde eigen is, wordt overgedragen op een probleemformulering of op een heel domein van menselijke activiteit. En kennelijk twijfelde men nauwelijks aan die mogelijkheid: bij De Fontenelle ging het door een wiskundige ergens aan te zetten (zo wist hij vrij zeker een wiskundige geest gevangen te hebben), bij Van Dantzig en Tinbergen door op een bepaalde wijze te werk te gaan.

Mathematisering 3: geest van wiskunde

Het overdragen van de wiskundige denkwijze bestond in het maken van de ontologische aanname en het ontginnen van het domein voor toepassen van wiskunde. Verschillende historici en filosofen hebben iets gezegd over wat die geest van wiskunde, of wiskundige denkwijze, nu eigenlijk inhield. We zullen bij een aantal te rade gaan om tot een meer inhoudelijke bepaling van het begrip mathematisering te komen.
De meeste auteurs doen een beroep een interpretatie van de geschiedenis. Galilei, Descartes en soms ook Newton worden hoofdpersoon gemaakt in de omslag van

Middeleeuwse natuurbeschouwing naar de nieuwe natuurwetenschap. En deze omslag, de Galileïsche, zou gekarakteriseerd worden door een mathematisering van de studie der natuur - c.q. van de mechanica, van de natuurfilosofie, van de wetenschap in het algemeen -. Gevraagd naar de strekking van mathematisering is zo een antwoord mogelijk aan de hand van details uit de handelingen der hoofdpersonen. Wanneer echter dan wordt beweerd dat de hoofdpersoon het object van de natuurstudie en het object van de wiskunde aan elkaar gelijkstelde, zijn we nog niet veel opgeschoten en heeft mathematisering nog geen preciesere betekenis. Omgekeerd laat zich hieruit wel onmiddellijk het moderne natuurbegrip aflezen: (levenloze) natuur is datgene wat mathematisch gevat kan worden, of: de natuur is voor de mens juist zover begrijpelijk als hij haar werking in zijn mathematisch denken kan volgen. Niet zelden laten schrijvers hierop een cultuurkritiek inzake de natuuropvatting volgen -het kwantificerend denken zou zich tezeer verbreiden en een eenzijdige cultuur veroorzaken-, maar merkwaardig genoeg blijft de eigenlijke omslag in opvatting van tijd, ruimte en oorzakelijkheid steevast buiten schot.

De klassieke vindplaats van "mathematisering" in de historische literatuur is de slotzin uit Dijksterhuis' *De mechanisering van het wereldbeeld*:

> "De mechanisering, die het wereldbeeld bij den overgang van antieke naar klassieke natuurwetenschap heeft ondergaan, heeft bestaan in de invoering van een natuurbeschrijving met behulp van de mathematische begrippen der klassieke mechanica; zij beduidt het begin van de mathematisering der natuurwetenschap die in de physica der twintigste eeuw haar voltooiing krijgt."[Dijksterhuis 1950: p. 550]

Dijksterhuis nam het begrip op naar zijn programmatische strekking. Descartes' aspiraties noemde hij een programma van mathematisering [Dijksterhuis 1950: p. 446]. Dijksterhuis lijkt echter te bedoelen dat Descartes er wiskunde van maakte, van de fysica. Mathematisering betekent dan een identificatie van het wiskundig en het natuurkundig object - met een lelijk woord "mathematificatie" -. Inderdaad, dat begin van mathematisering van de natuurwetenschap, de klassieke mechanica, is in Dijksterhuis' ogen:

> "niet slechts mathematisch in dien zin dat zij zich van de hulpmiddelen der wiskunde bedient om redeneringen die zich desnoods ook in de gewone omgangstaal zouden kunnen laten uitdrukken korter en overzichtelijker weer te geven, maar in dezen veel stringenteren, dat haar fundamentele begrippen mathematische begrippen zijn, dat zij zelf een wiskunde is."[Dijksterhuis 1950: p. 548]

Dijksterhuis' invulling van mathematisering is massief - en teleurstellend want nog steeds is niet gezegd wat mathematische begrippen onderscheidt van andere. De wetenschapshistoricus Hakfoort werpt daarop licht door onderscheid te maken naar mathematisering onder drie verschillende aspecten [Hakfoort 1988]. Ook hij bespreekt Descartes en wijst op een drieledige mathematisering van de natuurfilosofie, namelijk een ontologische en een methodologische mathematisering en het opstellen van wiskundige wetten. Methodologische mathematisering is het "more geometrico", het voorstellen van een theorie als stelsel van logische deducties uit een stel evidente axioma's. Het wiskundig formuleren van wetmatigheden is het eerder door Dijksterhuis gegeven kenmerk. Met ontologische mathematisering bedoelt Hakfoort dat het object van de natuurfilosofie op puur wiskundige wijze bepaald wordt, namelijk als res extensa (uitgebreidheid). Ook Hakfoort constateert bij Descartes een identificatie, "mathematistisch" noemt hij diens ontologie en methodologie. Het ontginnen van een objectgebied voor gebruik van wiskunde kunnen we zo, althans voorzover het gaat om identificatie -maar het gaat om meer-, wel nader aanduiden: het is het opvatten van een domein als res extensa.

Heel andere kenmerken van mathematisering geeft Mauersberger, techniekhistoricus, wanneer hij spreekt van mathematisering in de relatie tussen wiskunde en techniek, met betrekking tot de zestiende en zeventiende eeuw [Mauersberger 1988; 1989]. Hij komt tot een vijftal kenmerken die niet primair verwijzen naar zichtbare wiskundige inbreng maar juist naar die manier van voorstellen van het object: * elementarisering van technische bouwsels en processen; * het denken in plaatjes als typische ingenieursvorm van synthese, waarin de wiskunde nonverbaal en non-calculatief doorwerkt; * opkomst van de praktische mechanica (werktuigkunde) en praktische geometrie (landmeten, perspectief e.d.) op basis van uiterst elementaire meetkundige inzichten; * het technisch tekenen als taal van de ingenieur; * structurering van de technische kennis door steeds beknopter, en uiteindelijk symbolische, uitbeelding, en door het aanbrengen van systeem en classificatie in technische uitdrukkingen. Het aardige van deze kenmerken is, dat ze de mechanisch-technische overzichtsboeken van Leonardo en van Leupold en het mechanisch alfabet van Polhem in beeld brengen - die intuïtief alles te maken hebben met mathematisering, maar in de discussie erover dikwijls ontbreken -, dat Stevin nu ineens naast Descartes verschijnt en dat Leibniz met zijn bijdrage aan de natuurkunde èn aan het classificeren zeer prominent aanwezig is. Mathematisering volgens Mauersberger verwijst dus naar een structureren (uiteenleggen en samenbrengen) van het kengebied èn van de kennis.

definitie

Mathematiseren is nu, dat is de bepaling waar we hier op uitkomen, het verabsoluteren van het gezichtspunt van waaruit mathematische abstractie vertrekt, het gezichtspunt van uitwendige structureerbaarheid. Concreet: we maken schema's waarvan we wel aannemen dat ze een aspect van de werkelijkheid goed weergeven (de zaak was werkelijk structureerbaar), maar de redenen waarom de verbanden zus liggen en niet zo, kunnen in het schema niet tot uitdrukking komen. Het grote voordeel hiervan is de denkvrijheid: niets (niets dan de herinnering aan de herkomst) let ons om in het eenmaal gevonden schema een pijl andersom te tekenen of anderszins binnen het structurele te variëren. Niet de beperkte voorraad aan wiskundige structuur weerhoudt de fysici ervan nieuwe theorieën, quantummechanica of relativiteitstheorie, te ontwikkelen, maar het idee dat de bestaande theorieën een wezensinzicht in de natuur bieden - en dat nieuwe theorieën dat ook zullen moeten doen -.
Ten opzichte van Dijksterhuis en de anderen kies ik voor een nuancering van het begrip mathematisering: niet de natuur als mathematisch universum, niet gelijkstelling van een objectgebied aan het mathematisch object, maar een objectgebied

beschouwd in de vorm waarin het zich zou lenen voor mathematische abstractie, als drager van mogelijke daarvan los te maken structuur.
Concreter: Goudriaan bestudeert de bedrijfsorganisatie, maakt plaatjes van de goederenstromen in een bedrijf, kan daarin zowel direct verbeteringen aanwijzen, als algemene patronen van logistiek. Pas later komt de operations research en de bedrijfskunde. Tinbergen zoekt een theorie van de conjunctuurgolven, laat zich overzichten aanreiken van statistische gegevens van prijs en volume van produktie en herkent daarin, doordat het materiaal adequaat voorgesteld is - gemathematiseerd -, algemene patronen van vertragingsgolven. Pas uit de uitwerking van deze manier van doen komt een begin van econometrie voort, de mathematisering gaat vooraf. Van Wijngaarden stelde rekenschema's op, aanvankelijk in de vorm van rekenbladen. In tweede instantie werden zulke schema's zelf onderwerp van studie. Het ging, in tweede instantie, over de structuren van die schema's onafhankelijk van de berekeningen die erdoor beschreven (en onder het regime ervan uitgevoerd) werden. Die mathematiseringsstap was het begin van de kunst van het programmeren. Bij Nicola Oresme ving de mathematisering van de mechanica aan en Galilei's prestatie was niet het vinden van een formule, hij vond de correcte valwetten immers nog niet, maar het rigoureus doorzetten van deze werkelijkheidsbenadering. De natuur werd gemathematiseerd, zegt men, maar het ligt een stap ingewikkelder: het natuurbegrip van de moderne tijd is het resultaat van de Galileïsche werkelijkheidsbenadering. Wat betreft mathematisering is er dus in mijn ogen geen enkele tegenstelling tussen Bacon en Descartes [Kuhn 1979: p. 52] [Dijksterhuis 1950: p. 444]. De spanning tussen hun beider accentuering, is een touwtrekken geweest binnen de sfeer van de gemathematiseerde werkelijkheidsbeschouwing.

3. ZUIVERING VAN DE WETENSCHAP - EMANCIPATIE VAN DE WISKUNDE

Toegepaste wiskunde is een vergankelijk idee. Het hield 150 jaar stand en die anderhalve eeuw zullen we hier in drie hoofdstukken behandelen. Allereerst gaat het in dit hoofdstuk over het ontstaan van de zuivere en de toegepaste wiskunde die samen een onderdeel vormden van de zuivere wetenschap. Het volgende hoofdstuk, vier, belicht de traditie van toegepaste wiskunde en laat zien hoe dit denkbeeld van binnenuit werd uitgehold en gerelativeerd. Hoofdstuk vijf behandelt de traditie van het mathematiseringsstreven en toont de relativering van buitenaf van het begrip van toegepaste wiskunde.
Door het Verlichtingsdenken was de wiskunde in een klempositie komen te verkeren. Enerzijds werd zij erop aangesproken een fundament te bieden voor de andere wetenschappen, ja, voor de kennis van de gehele wereld: een kennis van de werkelijkheid los van geloof macht of gezag. Anderzijds betekende dit voor de wiskunde ook dat ze geen beroep mocht doen op traditie of intuïtie en al helemaal niet op metafysische overwegingen, maar waarop dan wel? Lagrange trof de wiskunde in deze klem aan en gaf de richting aan naar een "bevrijding", naar zuivere wiskunde - met de daarbij behorende grondslagenproblemen.

bewijs boven uitkomst van berekening

Rond 1800 voltrok zich een omwenteling in de wiskunde: bewijs en strengheid (rigor) werden belangrijk, even belangrijk als het resultaat van berekening of afleiding. De omwenteling is door alle historici van de wiskunde, zonder uitzondering, zo gesignaleerd, maar natuurlijk, zoals het historici betaamt, verschillend geïnterpreteerd. Het helderst over de betekenis van de omwenteling is Struik die spreekt van emancipatie van de wiskunde [Struik 1990: p. 191]. De wiskunde maakte zich vrij en kwam tot zichzelf.
Aan de andere kant verbazen dezelfde historici zich over de incongruentie tussen het nuttigheidsdenken van die tijd en de wending die de wiskunde nam, van de wereld af en van het perspectief van nut vandaan.

> "At the time when science should have been most obviously connected with the development of the machine age, arose the idea of pure science" [Bernal 1963: p. 29]

schreef bijvoorbeeld Bernal in 1963. Het is een paradox, een schijnbare tegenstrijdigheid die - als het goed is - in de loop van dit hoofdstuk zal verdampen. De Verlichting had namelijk voor de wiskunde niet één, maar twee uitkomsten, omdat deze wetenschap er een dubbele rol in speelde.

niet-euclidische meetkunde is wiskunde

De meetkunde verloor door de acceptatie van de niet-euclidische meetkunde als wiskunde zijn schijnbaar vanzelfsprekende verbinding met de werkelijkheid. Was de niet-euclidische meetkunde een eeuw eerder bij Gerolamo Sacchieri (1667--1733) een onderdeel van een filosofische onderneming, van een poging de noodzakelijkheid van de Euclidische postulaten te tonen; voor Nikolai I. Lobachevsky (1793-1856) en Janos Bolyai (1802-1860) was ze wiskunde ook al liet de receptie als zodanig nog op zich wachten. Er was nogal een stap voor nodig om het idee los te laten dat de meetkunde de basisstructuur is van onze werkelijkheid. Ook dit loslaten was een wezenlijk bestanddeel van de emancipatie die de wiskunde doormaakte. Het was Bernhard Riemann (1826-1866) die in 1854 in zijn Habilitations-voordracht 'Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen', dit deel van het emancipatieproces voltooide.

op aarde

Ten opzichte van de Verlichting onttrok de wiskunde zich aan het nuttigheidsdenken door reflectie op haar eigen begrippen en bewijsgronden. De poging die de Verlichting was om de rationaliteit van het Rationalisme op deze aarde te doen neerdalen, met name ten behoeve van de burgerij, stimuleerde de wiskundebeoefening en inspireerde tot mathematisering. Haar ongeduldige en in naam antispeculatieve effectbejag had een aantal praktische toepassingen van wiskunde dichterbij gebracht, had er meer van gemaakt dan het gebruik van de mechanica in de scheepsbouw en het gebruik van de astronomie in sterrekundige almanakken voor de scheepvaart. Ze had bovenal op een scala van gebieden van menselijk doen de potentiële toepasbaarheid van wiskunde aangewezen. Op het terrein van techniek, van inrichting en bestuur van de samenleving, van economie, van organisatie van de produktie had het werk van Adam Smith en anderen laten zien dat de zaken zich als structuren lieten beschrijven, cq ontwerpen, en volgens die beschrijving beheersbaar zouden zijn. Daar waren de aanzetten tot mathematisering gegeven.

Onder de verlichtingsdenkers was een stroming van empiristen, die zich weliswaar leek af te zetten tegen het voorop stellen van wiskundige theorievorming, maar op het vlak van mathematisering geen afwijking vormde. De empirische gegevens waarop deze mensen zich wilden oriënteren, waren gemathematiseerde gegevens.

Tegen deze achtergrond is het mathematiseringsimperialisme van een aantal wiskundigen, niet zo verwonderlijk. Niet de meest extreme maar wel de meest invloedrijke onder hen was Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). In zijn *Essai philosophique sur les probabilités* in 1814 pleitte deze ervoor om van het gebruik van wiskunde in de natuurwetenschappen na te volgen in het bestuderen van mens en samenleving. In dit mathematiseringsstreven toonde zich een andere tendens dan in de emanciperende wiskunde, die juist bezig was zich op zichzelf terug te trekken. De splitsing in de gevolgen van de Verlichting voor de wiskundebeoefening werd hier reeds zichtbaar.

bevrijding uit natuurfilosofie

De vraag is, waaruit de wiskunde zich dan wel emancipeerde. De wiskunde bevrijdde zich uit mêlee van natuurfilosofie, in het bijzonder wierp ze de hypotheek af waarmee het Verlichtingsdenken haar belastte. Emanciperen zeggen we, omdat we menen dat de wiskunde die eruit voortkwam de eigenlijke wiskunde is. In de achttiende eeuw was er geen scherp onderscheid tussen wiskunde en zijn toepassingen èn er was geen grondslagenprobleem. Beide kwamen naar voren rond 1800. Cauchy (1789-1857) en Weierstraß (1815-1897) en in mindere mate Bolzano (1781-1848) gelden als degenen die de strenge zuivere wiskunde gestalte hebben gegeven. Cauchy's *Cours d'analyse* uit 1821 gold lange tijd als toonbeeld van de zuivere wiskunde. Lagrange vervulde een cruciale rol in het pad daar naartoe: daarom staan we bij deze wiskundige langer stil.

3.a Lagrange en de paradoxale uitkomst van de Verlichting

Lagrange

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) had last van gal-aanvallen en depressies. Zijn ouders raakten hun vermogen kwijt en dat fnuikte zijn officierscarrière. Zijn vrouw stierf jong. Maar Lagrange was een zondagskind in de wiskunde, uiterst getalenteerd en zeer produktief, jong hoogleraar en door Euler op het pad van een internationale carrière geholpen.
Lagrange werd met 16 jaar leraar en drie jaar later hoogleraar aan de artillerieschool van zijn geboortestad Turijn (Turijn behoorde tot Savoie en was zo deel van Frankrijk). Vanaf die tijd, 1755, correspondeerde hij ook met Euler, in het bijzonder over de door deze ontwikkelde variatierekening. Daarover ging zijn eerste publikatie 'Recherches sur la méthode de maximis et minimis'. Euler was zo ingenomen met Lagranges oplossing van het isoperimetrie-probleem ("Nichts zu wünschen übrig"), dat hij hem corresponderend lid maakte van Frederik de Grote's Berliner Akademie der Wissenschaften en hem later aanbeval als zijn opvolger voor het hoogleraarschap in Berlijn (1766).
Na de dood van Frederik maakte Lagrange in Parijs een tweede carrière, gegrepen door het revolutionair elan, als hoogleraar aan de École Normale (1795) en aan de École Polytechnique (1797). Uit die laatste activiteit kwam zijn voor onze beschouwing belangrijkste leerboek voort: *Théorie des Fonctions Analytiques*. Na zijn dood in 1813 werd Lagrange bijgezet in het Panthéon.
Deze Lagrange was de grote zuiveraar van de wiskunde.

doorwerking van de Verlichting in de wiskunde-beoefening

Dat de achttiende eeuw de eeuw van de Rede mag heten, is omdat de Rede geacht werd van deze werkelijkheid te zijn; ze hoefde slechts te voorschijn geroepen te worden en wat de samenleving betreft slechts uitgeroepen te worden. Het niet alleen filosofisch maar ook maatschappelijk engagement van de Franse wiskundigen hoeft in die tijd niet te verbazen. Dat zij zich op hoog niveau met de politiek van de Revolutie inlieten, zegt ons iets over hun aanzien. Zo verdiende Carnot bij de Assemblée de eretitel "l'organizateur de la victoire".

Er was een continue overgang van het werk in de wiskunde en mechanica en astronomie naar het mechanicisme en, algemener, naar een wiskundig geïnspireerd rationalisme. Voltaire, Diderot, Lamettrie of d'Holbach gelden primair als filosofen. Hun werk laat zich bezwaarlijk los zien van dat van d'Alembert, Condorcet, Lagrange en Laplace die tegelijk wiskundige en filosoof waren. In de achttiende eeuw was de wiskunde niet wezenlijk onderscheiden van de mathematische wetenschappen, mechanica, astronomie en optica, en stond ze in open verbinding met een mathematiseringsimperialisme.
Lagrange protesteerde. Hij was een van de auteurs bij wie we de breuk met die open eenheid van natuurfilosofie kunnen waarnemen.

infinitesimalen

De wiskunde stond nogal onder druk 'van buiten', ten eerste onder druk van de verwachting een stevige fundering van de mechanica en de astronomie te bieden, ten tweede onder druk van de aanspraak om de Rede te verankeren en te vrijwaren van theologische en metafysische elementen. De wiskunde zou een analyse, dat wilde zeggen een rationele ontrafeling en metafysica-vrije verklaring, te bieden hebben van de wereld, te beginnen bij de verschijnselen van de natuur. Vooral Berkeley had de natuurfilosofen onbarmhartig herinnerd aan deze pretentie door hen voor de voeten te werpen dat de oneindig kleine grootheden waarmee vrijelijk gerekend werd niet minder metafysisch waren dan mysterie en geloof.
Newton had in zijn werk met *fluxies* gewerkt, differentialen voor snelheid en versnelling. Leibniz had daar zijn infinitesimaalrekening tegenover gezet. Daar stond de analyse, als machtige techniek maar ondoorgrondelijk en zonder vaste bodem. Een reeks van auteurs in de eerste helft van de achttiende eeuw hebben geprobeerd de zaak van de infinitesimalen op te helderen, zonder veel succes en blootgesteld aan stevige kritiek. De beroemdste kritiek kwam van een bisschop, George Berkeley (1685-1753), die vreesde voor de verdringing van het geloof door de oprukkende natuurwetenschap: *The analyst - or a discourse addressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly concieved, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith. "First cast the beam out of thine own eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye"* (1734).

analyse en analyse

De analyse als pretentie van werkelijkheidsverklaring leeft voort in de analytische filosofie. Analyse als de toen gangbare techniek van ontbinding en beschrijving in termen van differentiaal- en integraalvergelijkingen is onder de naam analyse, of "calculus" in het Engels, regulier onderdeel van de wiskunde geworden - en lange tijd hoofdbestanddeel gebleven. Bij Lagrange scheidden zich de wegen. Aan de ene kant voltooide hij, met zijn *Mécanique Analytique* in 1788, Newtons opzet van een volledig analytische behandeling van de mechanica, en stond daarmee met beide benen in de Verlichting. Aan de andere kant brak hij met het mathematiseringsimperialisme en ging filosofische discussies uit de weg: "Je ne sais pas", moet zijn standaardreactie zijn geweest; Frederik's filosofische salon meed hij.

Met deze nuchterheid plaatste Lagrange zich buiten het Verlichtingsdenken.

zonder plaatjes

Lagrange was er trots op de mechanica te presenteren in een boek zonder plaatjes, zonder beroep op aanschouwing of waarneming, dat wil zeggen zonder beroep op meetkundige intuïtie of fysische empirie. Hij vermeed het bijvoorbeeld 'kracht' als basisbegrip in te voeren. Op zijn vanuit de wiskundige theorie opgebouwde weergave gaat de (theoretische) mechanica terug zoals die tot voor kort aan vele universiteiten en hogescholen tot de wiskunde werd gerekend en door wiskundigen gedoceerd.
Lagrange behandelde de mechanica en de calculus nog in elkaars verlengde, maar in zijn poging beide te zuiveren van onbetrouwbare elementen - metafysica en waarneming - reduceerde hij ze tot wat naar onze latere begrippen puur wiskunde is. Dat zijn kritisch onderzoek zich uitstrekte tot de calculus, wellicht ook in reactie op Berkeley, ligt in de lijn van de Verlichting en onderscheidt hem er tegelijk van. De eenheid van de natuurfilosofie en de bestrijding van de metafysica waren hem door de Verlichting aangereikt. Er was dan ook geen reden om voor de calculus halt te houden. Lagrange was hiermee wel radicaler dan de 'philosophes' voor wie de wiskunde, met name de meetkunde, een ankerplaats voor de Rede was. Een omkering van hun positie was dit nog niet, want wat hij onder de loupe nam was niet de wiskunde, het waren de mathematische wetenschappen, de gemengde wiskunde. Pas het resultaat van zijn zuivering zou wiskunde zijn.

prijsvraag

Schreef Lagrange nog in 1759 aan Euler dat hij de elementen van de differentiaal- en integraalrekening had uitgewerkt, ten behoeve van zijn studenten aan de militaire school van Turijn, en zelfs had ontvouwd "de ware metafysica van hun principes, voor zover dit mogelijk is". In 1772 had hij bewust en expliciet gebroken met dergelijke funderingspogingen. Toen stelde hij zich ten doel de behandeling van differentialen en integralen terug te voeren op algebra en deze zo "onafhankelijk [te maken] van iedere metafysica en iedere theorie van oneindig kleine en verdwijnende grootheden" (Zulke grootheden waren precies het mikpunt geweest van Berkeley's kritiek, dat de calculus toch correcte resultaten opleverde zou wel komen door "compensation of errors"). De 'algebraïsche reductie' of arithmetisering van Lagrange bestond er in dat hij niet langer Newton's fysisch geïnspireerde introductie van de *differentiaal* van een functie volgde, maar de *afgeleide* functie bij een functie definieerde met behulp van reeksontwikkelingen. De colleges voor de Ecole Polytechnique waren voor hem uiteindelijk de aanleiding om zijn programmatische uitspraken en oproepen zelf op te nemen en de hele calculus met al zijn resultaten te herschrijven op deze nieuwe basis. In 1797 verscheen zijn *Théorie des fonctions analytiques*.
Lagrange had wel telkens uitdrukkelijk zijn eigen positie ingenomen - in 1784 had de academie van Berlijn op zijn voorstel de vraag naar een fundering van de analyse als prijsvraag uitgeschreven -, maar pas in het voorwoord van dit boek ging hij de discussie met andere opvattingen over de fundering van de calculus

aan, nu kennelijk zeker van zijn zaak. In 1788 gebruikte hij bij zijn analytische behandeling van de mechanica nog de 'ouderwetse' infinitesimalen, in het voorwoord van de tweede druk van de *Mécanique analytique* merkte hij op dat de gebruikte calculus streng algebraïsch gefundeerd kon worden; waarmee hij in zijn ogen het project van zuivering van de mathematische wetenschappen van metafysische elementen voltooid had. [Grabiner 1981]; [Schubring 1981]. Het grote belang van Lagrange is dat hij in de traditie van de Verlichtingsfilosofie stond en één lijn daaruit radicaal doortrekkend een gezuiverde analyse aanleverde waarop Cauchy, Bolzano en anderen konden voortbouwen tot een strenge en zuivere wiskunde.

reflectie op het vak geeft vernieuwing

Misschien was het filosofische belangstelling, misschien gewoon een strijd tegen vaagheid en onbetrouwbaarheid, misschien was het een verlicht streven de mathematische wetenschappen te vrijwaren van ieder ander gezag dan de rede; het inspireerde Lagrange in ieder geval tot het uitbannen van wat hij zag als elementen van waarneming of van metafysica. De zuiveringsactie op zich sloot aan bij de Verlichting, de consequentie ervan niet meer. Lagrange was al niet geïnteresseerd in de luidruchtige ideologie van de Verlichting, noch in het mathematiseringsimperialisme, noch in pogingen om meer terreinen onder de mathematische wetenschappen te laten ressorteren. Zijn aandacht was naar binnen gericht. Hij voltrok, en dat plaatst hem buiten de Verlichting, een reflectie op het vak. Praktisch gezien voltrok hij een synthese en een herschrijving van de mechanica en van de differentiaal- en integraalrekening. Deze reflectie op de mathematische wetenschappen resulteerde in een terugtrekken op dat wat geen externe kriteria behoefde, op een zuivere wetenschappelijkheid. En dit resultaat ging nu gelden als de nieuwe karakterisering van wiskunde, zuivere wiskunde.

3.b Scheidslijn

Cours d'analyse

De zuivere wiskunde ontstond binnen de eenheid van mathematische wetenschappen. Er was geen tegenstelling met of afkeer van toepassingen, integendeel. De gezuiverde wiskunde stond nu op zichzelf, welonderscheiden van andere gebieden, zodat er vanaf dat moment pas sprake kon zijn van toepassing van het een op het ander. Buiten de boot viel niet het toepassen, maar het mathematiseren. Toegepaste wiskunde was primair toegepaste zuivere wiskunde en ontstond hand in hand met de zuivere wiskunde. Het nieuwe van de zuivere wiskunde was het adagium dat ten bewijze van wiskundige beweringen een beroep op de waarneming of op metafysische inzichten werd afgewezen. Men slaagde erin een terrein af te bakenen van wiskundig toelaatbare argumentaties. Er was consensus over de middelen en van deze consensus schiep Cauchy in 1821 een toonbeeld - dat er later is afgedongen op sommige van Cauchy's stellingen en zelfs op zijn bewijs-

voeringen, doet aan de paradigma-status van zijn *Cours d'analyse* niets af. Hij liet zien: zó bewijst men in de wiskunde. Met enige overdrijving spreekt men van de tweede geboorte van de wiskunde. De eerste had zich getoond bij de Grieken in het axiomatisch bouwwerk van de Euclidische meetkunde.
Het object van de wiskunde lag intussen niet meer vast. Descartes had met zijn Mathesis Universalis al gerommeld aan de status van getal en figuur als laatste object van wiskundig denken. Nu het zijn natuurfilosofische binding met de empirie had verloren, raakte het in de loop van de negentiende eeuw volkomen op drift; of anders gezegd, het ontplooide zich in een ongekende rijkdom van variaties. Het was wel zo dat de zuivere wiskunde zich op deze manier gaandeweg verwijderde van de toegepaste; een wezenlijke tegenstelling was de afstand niet. In wisselwerking verbonden traden beide toe tot het domein van de zuivere wetenschap.

toepassen is nadoen

Het toepassen van wiskunde stond nog in het teken van het Galileïsche idee dat het boek van de natuur is geschreven in de taal der wiskunde. Wiskunde kon zonder meer als waarheidbrenger te hulp geroepen worden. Was de goede, geschikte wiskunde erbij gehaald, dan bestond aan de waarheid van de aldus geformuleerde kennis geen twijfel. Toepassen was het nadoen van bepaalde wiskundige resultaten op fysische objecten, alsof het wiskundige objecten zijn. Het toepassen kon dan ook sterk eenzijdig vanuit de wiskunde bekeken worden.
'Toegepaste wiskunde' werd het werkterrein van toepassen binnen de mathematische wetenschappen. Daar kon men zich permitteren de objecten te behandelen alsof het mathematisch objecten waren; daarheen kon men de in de wiskunde gevonden samenhangen en overgangen transponeren zelfs zonder de wiskundige onderbouwing ervan na te bootsen. Het onderscheid tussen toegepaste wiskunde enerzijds en mechanica en mathematische fysica anderzijds was niet altijd even scherp. De opkomst van zuivere en toegepaste wiskunde die we hier aan de hand van het voorbeeld van Lagrange gevolgd hebben ging gelijk op met een stringentere greep van het wiskundig denken op de toepassingsgebieden, op de mathematische wetenschappen. Na de mathematisering die bij Galilei zijn beslag had gekregen werd er nu bijna helemaal wiskunde van gemaakt, met een lelijk woord: 'mathematificatie'.

echte scheidslijn

Daar kwam de echte scheidslijn te liggen, tussen de wetenschappen die zich voegden naar de stringente mathematische behandeling en de overige kengebieden. De natuurkunde, mechanica, optica en de sterrekunde vielen binnen de mathematische wetenschappen, de overige, in het algemeen de studie van het levende, erbuiten: de biologie, de farmacie, de medische wetenschap en de politieke en economische wetenschap. De politieke rekenkunde, de farmacie, delen van biologie en medische wetenschap, de opkomende chemie behoorden wel tot het brede veld van kennis waar mathematisering bezig was zich te voltrekken. Ze waren voorwerp van het verlichte mathematiserings-imperialisme, maar de open verbinding met de mathematische wetenschappen was verbroken.

Waar Diderot en d'Alembert nog samen aan de *Encyclopédie* werkten, daar bleken Laplace, Comte, Malthus en de opvolgers van Adam Smith tot een andere traditie te behoren dan Cauchy, Fourier en Gauß.

Essai philosophique

Een blik op Laplace's *Essai philosophique* (1814) geeft al snel enig idee waarom hij, die grote invloed had gehad in de Ecole Polytechnique en zeer gewaardeerd werd om zijn *Traité de mécanique céleste* (1792) zich buiten de nieuwe kring van wiskundigen rond Cauchy plaatste.

> "Bijna al onze kennis is slechts waarschijnlijk; en bij de paar dingen die we met zekerheid kunnen weten, bij de mathematische wetenschappen zelf, berusten de voornaamste middelen om de waarheid te bereiken, inductie en analogie, op waarschijnlijkheid, . . . " Terwijl:
> "Alle gebeurtenissen, zelfs die die door hun nietigheid niet schijnen te malen om de grote natuurwetten, zijn een even noodzakelijk gevolg van deze wetten als de omwentelingen om de Zon"

Het stugge determinisme, dat Laplace hier beleed, zal al geen gemeengoed meer zijn geweest; de zuiver en toegepast wiskundigen waren vooral niet meer geïnteresseerd in 'alle' kennis, ze hadden zich juist teruggetrokken op eigen terrein. Laplace daarentegen was druk met de introductie van toepassingen van waarschijnlijkheidsrekening op "politieke en morele" kwesties. Het was een van de hoofddoelen van het *Essai philosophique* en de *Théorie analytique des probabilités* (1812) om deze gebieden te betrekken bij de mathematische wetenschappen.

> "Laten we op de politieke en morele wetenschappen de methode gebaseerd op waarneming en berekening toepassen, de methode die ons in de natuurwetenschappen zulke goede diensten heeft bewezen. Laten we vooral geen nutteloze en dikwijls gevaarlijke weerstand bieden aan de onvermijdelijke gevolgen van de 'progrès des lumières'; . . ."

De tegenstelling tussen Laplace en Cauchy kan model staan voor de scheiding der wegen van enerzijds het mathematiseringsstreven - een streven dat in het verlichtingsdenken imperialistische vormen had aangenomen - en anderzijds de zuivere en toegepaste wiskunde-beoefening. We zullen zien dat pas in het midden van de twintigste eeuw beide tradities weer samenkomen.

4. 150 JAAR TOEGEPASTE WISKUNDE

tweeërlei relativering

Honderdvijftig jaar lang benoemde men de relatie tussen wiskunde en praktijk als toegepaste wiskunde. Het idee van een op andere kengebieden toegepaste wiskunde werd zowel van binnenuit als van buitenaf gerelativeerd. De aanval van buitenaf komt in het volgende hoofdstuk aan de orde, het mathematiseringsstreven liet zich niet voor altijd buitensluiten. Eerst belichten we in dit hoofdstuk de toegepaste wiskunde en de veranderingen op dit werkterrein zelf, die het steeds moeilijker maakten het oude idee van toepassen te handhaven. Daartoe is het nodig vooraf even de context van wetenschapsbeoefening te belichten. Een nieuw stijl van wetenschapsbeoefening deed zijn intrede, onderzoek. Daarbinnen behoorden zuivere en toegepaste wiskunde gezamenlijk tot het terrein van de zuivere wetenschap. Het mathematiseringsstreven viel daar over het algemeen buiten.

onderzoek

Forschung, research of onderzoek was de stijl van wetenschapsbeoefening die in de eerste helft van de negentiende eeuw opkwam. Uiterlijke kenmerken waren die van professionalisering, zoals het ontstaan van een minder of meer gesloten beroepsgroep, met specifieke opleidingen, met beroepsverenigingen, met vaktijdschriften. In de achttiende eeuw hadden de liefhebbers van wetenschap elkaar getroffen in academies en genootschappen, tot vermaak en nuttige lering. In Nederland, in de Republiek, waren het natuurlijk genootschappen: het Wiskundig Genootschap "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" (1778) en het genootschap Felix Meritis (1787) zijn alleen al om de naam mooie voorbeelden. In de negentiende eeuw sloegen de professionals toe. In de loop van de eeuw ontstonden instituten met vakbibliotheken, speciale kabinetten en zelfs laboratoria. Vaktijdschriften verdrongen de berichten van de academies en de verslagen van de genootschappen van de eerste plaats. Er verschenen catalogi van bibliotheken, bibliografieën van vakgebieden en referaattijdschriften. Het oudst bekende referaattijdschrift is het *Chemisches Zentralblatt*, dat in 1830 voor het eerst verscheen onder de titel *Pharmaceutisches Centralblatt.* Het verlichte vooruitgangsgeloof had zijn hoop mede gevestigd op de moderne, gemathematiseerde, wetenschap.

ander waarheidsidee

Omgekeerd gold nu ook een vooruitgangsidee ten aanzien van de wetenschap zelf. Ieder nieuw resultaat werd gezien als een toevoeging aan het geheel van kennis. De gestage uitbreiding en onophoudelijke herziening maakte dat men niet meer naar "de wetenschap" kon vragen, maar telkens opnieuw de "stand der wetenschap" moest vaststellen. Het state-of-the-art-artikel was de twintigste eeuwse consequentie. De wiskundigen beproefden in de loop van de negentiende eeuw nog de omvattende bibliografie. De DMV, Deutsche Mathematiker Vereinigung, schiep echter vanaf haar oprichting in 1890 een nieuwe traditie met de publikatie van overzichtsartikelen over deelgebieden van de wiskunde in haar *Jahresberichte*. Kenmerkend voor de nieuwe stijl van wetenschapsbeoefening was de opkomst van het positivisme, met zijn reductie op het feitelijke, zijn "zu den Sachen selbst", en zijn vooronderstelling geen vooronderstellingen te maken. Daar hoorde een verschuiving van het waarheidsbegrip bij van evidentie naar - te verifiëren - zekerheid. Het kriterium van wetenschappelijkheid werd de wijze van vraagstelling in plaats van het resultaat. Het karakter van de absoluutheidsaanspraak van wetenschap veranderde. Kennis had een absoluut karakter gehad in de zin dat het een wezensinzicht verwoordde. In de 19e eeuw ging absoluut betekenen dat een uitspraak altijd en overal geldig moest zijn - een aards, zo men wil "semantisch", kriterium dus -.

subject van kennen

Er voltrok zich een reflectie op de wetenschap die erin resulteerde dat kennis meer dan voorheen gesteld werd, gesteld als weergave van een - van die kennis onderscheiden - werkelijkheid. Wetenschap werd onderzoek leidend tot uitspraken over de werkelijkheid. De kern van de nieuwe wetenschapsopvatting is dat er tussen object en kennis impliciet een subject werd geschoven: de waarnemer en weergever. Was de geleerde een personificatie van kennis, zijn plaats werd ingenomen door de onderzoeker die zich niet zozeer door parate kennis als wel door een "wetenschappelijke" houding van waarnemen en weergeven onderscheidde.

wiskundig onderzoek

De wiskunde-beoefening volgde in deze ontwikkeling; voor de rol van het wiskundig denken reikten bovendien de consequenties veel verder. Een eerste stimulans voor het wiskundig onderzoek was juist het hoger onderwijs. Met name dat aan de Ecole Polytechnique leverde niet zomaar een reeks leerboeken op, het dwong de wiskundigen delen van hun vak als geheel te overzien en zich te bezinnen op de wijze van presenteren. Het perspectief van praktisch nut vervaagde snel en de generatie van Cauchy bemoeide zich niet meer met staatszaken. Wel was er nu een circuit van professionals die zich geheel aan het vak konden wijden. Het stellend karakter, het doen van uitspraken, trad in de wiskunde sterker dan in enige andere wetenschap naar voren, zij het nog niet in de expliciete vorm van de latere constructivistische opvatting van wiskunde. De relativering van wiskundige waarheid bleek duidelijk bij Riemann die niet meer sprak van de axioma's, maar van *Die Hypothesen welche die Geometrie zugrunde liegen*
De vorming van kabinetten, instituten en bibliotheken, deze kenmerken van onderzoek vertoonde de wiskunde-beoefening pas tegen het eind van de negentiende eeuw. Toen ontstonden ook de modellenverzamelingen, de leeskamers, de nationale beroepsverenigingen en de internationale vaktijdschriften; ze waren aan het begin van de eeuw voorafgegaan door de bibliografieën in boekvorm en

Crelle's *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1827). Het eerste pure referaat-tijdschrift op het gebied van de wiskunde, de *Revue Sémestrielle* (1893), was een Nederlandse onderneming.

4.a Onderzoek en wiskunde in Nederland in de 19e eeuw

De wiskunde-beoefening in Nederland was in de negentiende eeuw bepaald middelmatig. Ziet men de geschiedenis van de wiskunde als een opeenvolging van stellingen en grote vermoedens dan zou de enige bijdrage van Nederland de miskenning van Stieltjes zijn geweest. Hieraan mag echter niet de conclusie worden verbonden dat er niets gebeurde. Zo min als het beeld van Jan Salie een getrouwe indruk van Nederland in de negentiende eeuw zou geven, zo min mag men voorbijgaan aan de continuïteit in de wiskunde-beoefening. De Nederlandse wiskunde viel buiten de grenzen weliswaar niet op, maar gaf wel een afspiegeling te zien van de internationale ontwikkeling in het vak. In het begin van de eeuw was Jacob de Gelder (1765-1848) de meest vooraanstaande wiskundige [Beckers 1993], verdienstelijk leraar en leerboekenschrijver, betrokken bij de praktijk van het landmeten - de triangulatie van Nederland - en toonaangevend lid van het Wiskundig Genootschap. De Gelder moet zijn expliciete uitingen en zelfs een boek over het onderwijs in de wiskunde de eerste didacticus van de wiskunde in Nederland geweest zijn. In verband met de verhouding tussen wiskunde en techniek was De Gelders carrière aan het militair hoger onderwijs van groot belang. Hier was hij, met een beetje overdrijving de Nederlandse Monge.

propaedeuse

Het middel dat Monge in zijn concept van de Ecole Polytechnique had aangereikt om de mathematisering te verbreiden was de wis- en natuurkundige propaedeuse, waarbinnen zijn beschrijvende meetkunde een voorname plaats kreeg toebedeeld. Het leren van wiskunde (en natuurkunde) diende hier niet alleen de toegang tot iets anders - wat in hoofdstuk twee is aangeduid als de stille ideologie van de Verlichting -, de lessen waren instrumenteel bedoeld. De propaedeuse stond niet in functie van een ongenoemd hoger doel, maar in functie van de volgende fase van de opleiding. In feite was de aansluiting niet altijd even herkenbaar en precies op dat punt zouden zich telkens de spanningen voordoen. Nu was de Polytechnique er ook voor om hoger administratief kader te selecteren en daartoe hoefde de school slechts aan de stille ideologie te beantwoorden.

"Het is altijd nuttig correct te denken, zelfs over nutteloze onderwerpen".

Zo had de stille ideologie bij De Fontenelle geklonken. Maar met dit argument namen de ingenieurs natuurlijk geen genoegen; in technisch perspectief moest de geest op nuttige zaken gericht zijn en dat beloofde de luidruchtige Verlichtings-ideologie ook. Zodra in de verdere geschiedenis van de technische hogescholen de wiskundedocenten openlijk neigden tot de houding van De Fontenelle, kwam er ruzie.

Ecole Polytechnique voorbeeld

De Ecole Polytechnique werd weliswaar het toonbeeld voor ingenieursopleidingen elders in de wereld, het voorbeeld werd over het algemeen niet strikt nagevolgd. Met name het Franse stelsel van praktijkgerichte vervolgopleiding los van de Polytechnique werd niet in die vorm overgenomen. Bij alle varianten echter, en bij hervormingen van die varianten, was de wiskundige propaedeuse een constante.

In Nederland wilde men aanvankelijk de propaedeuse niet en kreeg dus ook geen wetenschappelijke ingenieursopleiding. De Nederlandse officieren wilden het niet, een dergelijke opleiding voor hun rekruten. Bevreesd voor een te eenzijdig theoretische opleiding torpedeerden zij in 1808 met succes Lodewijk Napoleon's voornemen één centrale polytechnische school te stichten. Het zou een gevaar inhouden gezien de "geaardheid" van de Nederlander, zo meende een daarop studerende commissie, daar sommige leerlingen eenmaal gegrepen door het "zoet der wetenschappen" nog slechts moeilijk de motivatie zouden kunnen opbrengen om zich de zo noodzakelijke praktische vakkennis eigen te maken.

De Gelder en Voet

De meeste instellingen buiten Frankrijk kozen ervoor een volledige beroepsopleiding te verzorgen en juist dan kwam het conflict tussen theoretische aanhef en praktisch gericht slot van de scholing, zonder herkenbaar verband tussen beide, in volle omvang naar voren. Een van de voornaamste redenen dat de Artillerie-Genieschool in Delft (1814-1828) slechts een kort leven beschoren was, was een hoog oplopend conflict tussen directeur Voet en wiskunde-leraar J. de Gelder. Het model van de Ecole Polytechnique was weliswaar niet zo overgenomen, De Gelder wilde toch de wiskunde doceren in de stijl van die school en was niet bereid zich naar Voet's directieven te voegen. In de breekbare situatie van de jonge opleiding van militair kader (en van kleine aantallen landmeters en waterstaatingenieurs) kon de onenigheid uitgroeien tot een controverse die het bestaan van de Delftse school bedreigde. Tien jaar later, in 1828 wèrd deze opgeheven en vervangen door de Koninklijke Militaire Akademie in Breda. In 1843 opende de, civiele, Koninklijke Akademie haar deuren, opnieuw in Delft. Uit deze Akademie (1843-1864) kwam via de Polytechnische School (1864-1905) de Technische Hoogeschool voort, waarbinnen de Wiskundig Ingenieursopleiding zou ontstaan. De wonderlijke ontwikkeling heeft zich voor in de daaropvolgende eeuw voorgedaan, dat enerzijds de technische vakken wetenschappelijker werden, meer doortrokken van wiskunde, en tegelijk daarmee de opleiding geleidelijk minder schools werd, en dat anderzijds de greep van de wiskundigen op de opleiding afnam.

Jacob de Gelder werd na zijn Delftse perikelen hoogleraar in Leiden. Na hem was H. Strootman rond 1840 de eerstvolgende wiskundige bij het militair hoger onderwijs die zich met leerboeken en vertalingen verdienstelijk maakte. Wiskundig en onderwijspolitiek was hij overigens niet van het kaliber van De Gelder.

bibliografische arbeid

Met D. Bierens de Haan (1822-1895) hervond de Nederlandse wiskunde-beoefening enige internationale aansluiting. Hij publiceerde in 1863 een overzichtswerk over mathematische functies, maar is vooral bekend gebleven vanwege zijn historische studies. Met Bierens de Haan begon de geschiedschrijving van de wiskunde in Nederland. De aanleiding was kenmerkend voor de stand van de zich professionaliserende wiskunde: op zoek naar een historische fundering van het zelfbeeld van de zuivere (en toegepaste) wiskunde. Wiskundigen uit verschillende Europese landen kwamen in 1870 overeen een totaaloverzicht van de wiskundige literatuur samen te stellen. Om te beginnen zou elk een overzicht van de nationale literatuur tot 1800 opstellen om in volgende stadia telkens een decennium voort te schrijden tot het moment van de dag bereikt zou zijn. Die eerste overzichten zijn rond 1880 verschenen; het vervolg is met wisselend succes ondernomen. Bierens de Haan heeft verder de *Bouwstoffen* voor de geschiedenis van de wiskunde nagelaten en het eerste initiatief genomen tot de uitgave van het volledige werk van Huygens. De andere uitkomst van hetzelfde pogen greep te houden op het uitdijende vak, goeddeels uitgaand van dezelfde betrokkenen, was de actuele bibliografie. Dit werk gebeurde al tot op zekere hoogte in het tijdschrift *Bibliotheca Mathematica*, toen een internationale bijeenkomst van wiskundigen in 1889 in Parijs (inderdaad naar aanleiding van 100 jaar Franse revolutie en één in een reeks van universalistische ondernemingen die zo karakteristiek waren voor die periode) besloot een classificatie te ontwerpen voor het beschrijven van mathematische literatuur en de gemeenschap van wiskundigen opriep de uitgave van een bibliografie ter hand te nemen. Aanvankelijk onder aanvoering van Bierens de Haan en na diens overlijden van Korteweg en Schoute, nam het Wiskundig Genootschap deze taak op zich. Vanaf 1893 werd de *Revue Sémestrielle* uitgegeven vanuit Amsterdam. Bewust of niet, het paste wonderwel in de opkomst van de Nederlandse wiskunde-beoefening. Zo'n dertig Nederlandse wiskundigen spendeerden vanaf die tijd hun energie aan het excerperen van nagenoeg alle wiskundige tijdschriften. Ongeveer iedere actieve Nederlandse wiskundige van rond de eeuwwisseling werd ingeschakeld bij de onderneming. De gevolgen voor de vakkennis in de Nederlandse wiskunde-gemeenschap laten zich raden.

D.J. Korteweg (1848-1941) aanvaardde zijn hoogleraarschap in Amsterdam in 1881 met de voor ons belangwekkende rede *Wiskunde als hulpwetenschap*, waarin hij volkomen het standpunt van de klassieke toegepaste wiskunde vertegenwoordigde. Korteweg, van de Kortweg-De Vries-vergelijking, was de eerste die werkelijk internationaal doorbrak. Daarnaast speelde hij een cruciale rol in de verdere opbouw van de wiskunde-beoefening, door bovengenoemd bibliografisch initiatief en meer nog als leermeester van mensen als Brouwer (1881-1966) en Mannoury (1867-1956). Met Korteweg eindigt het overzicht van de wiskunde in Nederland in de negentiende eeuw: pas rond de eeuwwisseling internationaal vooraanstaand onderzoek, maar gedurende de hele eeuw afspiegeling van de algemene ontwikkeling van het vak.

4.b Toegepaste wiskunde

In onderzoek in het algemeen verschoof de inbreng van de wiskunde naar de buitenkant. Dat wil zeggen, de bestaande wiskunde of het daartoe ontwikkeld wiskundig instrumentarium diende meer en meer als uitdrukkingsmiddel voor wetenschap. De onderzoeker bediende zich van de stenografie van de wiskundige formulering. En dat was de toepassing die anderhalve eeuw toegepaste wiskunde kenmerkt. Het was de taak van de toegepast wiskundige de geschikte wiskundige samenhang te formuleren en te bewijzen, opdat de onderzoeker er de in zijn wetenschap gevonden samenhang in zou kunnen uitdrukken. Karakteristiek onderscheid met de vroegere wetenschapsbeoefening was het verzwijgen van de ontologische aanname: wat de onderzoeker in feite stilzwijgend deed, voorgaf te kunnen doen, was het nadoen op zijn objectgebied van de wiskundige samenhang die in de formule was uitgedrukt. Anders dan in de voorafgaande periode was ook het groeiend besef van het niet samenvallen van wetenschappelijke uitspraak en werkelijkheid.

benaderen

Toegepaste wiskunde kunnen we nu, achteraf, het resultaat noemen van het besef dat wiskunde zich niet zomaar op de werkelijkheid laat plakken - appliceren -. Praktische wiskunde werd bedreven in het vertrouwen dat een identificatie van wiskunde en praktijk mogelijk was, dat de wiskunde zich zonder wezenlijke problemen ten uitvoer liet brengen in een technische context. Onder meer aan de infinitesimaalrekening en aan de erkenning van de niet-euclidische meetkunde had men echter kunnen zien dat een dergelijke identificatie niet opging. De toegepaste wiskunde zonderde die toepassingsgebieden af waar de identificatie wel doorgang kon vinden. Toegegeven werd de onmogelijkheid van een identificatie met de werkelijkheid. Daarop werd geantwoord met het idee van een benadering, alsof de zaken toch nog als gelijksoortig konden worden behandeld: het wiskundig object en het technisch ding.
Men benaderde de werkelijkheid in plaats van haar zonder meer weer te geven. Uitdrukkelijk gebeurde dit in de numerieke analyse en in de eerste aanzetten tot foutenberekening: daar was de wiskunde meetinstrument geworden. In het algemeen was toegepaste wiskunde toegepaste analyse, het werkterrein van differentiaal- en integraalvergelijkingen binnen de mathematische wetenschappen. Gezien in de relatie tot de werkelijkheid, ging het om een benaderen van de empirie; waarheid was het kriterium. Waarheid was voordien niet kriterium maar uitgangspunt geweest; aan de in de wiskunde of naar het voorbeeld van de wiskunde uitgedrukte wezensinzichten was voorheen een hoger realiteitsgehalte toegekend dan aan de waarnemingsgegevens. De werkelijkheidsbenadering was ten opzichte daarvan radicaal van richting veranderd en bood nu het kader van zingeving voor het toepassen van wiskunde. De toegepaste wiskunde werd geïnspireerd door het streven naar zo groot mogelijke uitdrukkingskracht ten aanzien van empirische gegevens. Het zuiver wiskundige werk van Cauchy in de analyse had zo zijn tegenhanger in de toegepaste wiskunde van Fourier, die door Navier als volgt werd gekarakteriseerd:

> "De resultaten die zojuist uiteengezet zijn, zijn verkregen door middel van partiële differentiaalrekening, een van de vruchtbaarste en voor de natuurfilosofie nuttigste takken van de wiskundige analyse. Ik heb de integratiemethoden gebruikt de zijn bedacht door de heer Fourier, naar aanleiding van zijn onderzoek naar de theorie van warmte, en die een waardevol hulpmiddel bieden voor de oplossing van een groot aantal belangrijke vragen". [Navier 1823: p. 14]

Het paradigma van de toegepaste analyse bleef globaal intact tot het midden van de twintigste eeuw. Verschillende ontwikkelingen ondergroeven echter onderwijl het beeld en toonden aanzetten tot een andere wijze van bruikbaar maken van het wiskundig denken.

Navier: verschil tussen verschijnselen en hypothesen

C.L.M.H. Navier (1785-1836), Frans ingenieur, was de man van de beruchte Navier-Stokes-vergelijkingen. De naam van zijn beschermheer J.B.J. Fourier (1768-1830), Frans wiskundige en fysicus, leeft voort in Fourier-reeksen en Fourier-analyse. Navier kreeg van staatsraad Becquey de opdracht om een onderzoek te doen naar hangbruggen en reisde daarvoor onder andere Schotland. Hij bestudeerde de voorbeelden maar zijn beschouwingen waren vooral gericht op de abstracte behandeling van de algemene aspecten.

> "De meeste vraagstukken met betrekking tot de beweging van lichamen zijn te ingewikkeld om alle onderdelen met de calculus te kunnen omvatten; dit soort onderzoek vereist een bijzondere techniek die erin bestaat de op te lossen vraagstukken te vervangen door andere vragen die daarvan zo weinig mogelijk verschillen maar waarop de calculus wel toegepast kan worden. Naarmate de analyse volmaakter wordt lost men vragen op die steeds dichter bij de te bestuderen verschijnselen liggen: al leveren de oplossingen geen resultaten die de natuurlijke [d.w.z. behorend tot de empirische werkelijkheid - GA] effecten helemaal dekken, ze werpen ten minste veel licht op de wetmatigheden van die effecten. Deze techniek wordt aldoor gebruikt; maar dikwijls heeft men onvoldoende gelet op het verschil dat bestond tussen de verschijnselen en de aan de analyse onderworpen hypotheses, en heeft men teveel vertrouwen en gezag gehecht aan de rekenresultaten." [Navier 1823: p. 11]

Navier handelde er ook naar, op meerdere onderdelen van zijn hangbrug-onderzoek gaf hij op grond van grove berekening een kwalitatief resultaat, bijvoorbeeld een bovengrens voor de belasting van de hangkettingen. Ook daar bleef een zo dicht mogelijk benaderen, een zo precies mogelijk berekenen, voor Navier het perspectief bepalen. Wat hij feitelijk deed, had de potentie in zich uit het approximatieve stramien van de toegepaste analyse te breken; naar eigen zeggen echter stopte hij de berekening slechts op dit punt, omdat nadere bepaling te zeer afhing van situatie en constructie van de betreffende brug.

Navier's implementatieprobleem

Hij liet de tweede druk, in 1830, van *Rapport à Monsieur Becquey, conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus* volgen door een verdediging van zijn ontwerp voor de Pont des Invalides. Er was hem niet een echte hangbrug bezorgd, de uitvoerder had de brug uit voorzorg maar stug gemaakt. Navier had een echt implementatie-probleem. hoezeer hij zich ook bewust was geweest van het onderscheid tussen bestudeerde hypothese en werkelijkheid, op de moeilijkheden rond het waar maken van zijn theoretische inzichten had hij zich verkeken.

reflectie: toegepaste wiskunde zuivere wetenschap

Toegepaste wiskunde ontplooide zich vanaf Fourier, Cauchy, Navier en de anderen enerzijds door mathematische reflectie tot een intern wiskundige aangelegenheid, zij kwam anderzijds tot wasdom in wisselwerking met de toepassingsgebieden.
In de zuivere wiskunde voerde de reflectie op de analyse tot formulering van begrippen als functie en continuïteit. Ook de toegepaste analyse, de leer van differentiaalvergelijkingen en hun oplosmethoden had telkens aftakkingen naar de zuivere wiskunde, maar ontwikkelde zich vooral als zelfstandig geheel van kennis beschikbaar voor toepassing, toepasbaar. Toch juist als zelfstandig geheel behoorde ze tot de zuivere wetenschap en onderscheidde ze zich steeds minder van de zuivere wiskunde.

metaforen

Het paradigma van de toegepaste analyse, het idee van toegepaste wiskunde als werkelijkheidsbenadering, ontmoette vele complicaties, maar echt in gevaar kwam het op het terrein waar alles zo zeker leek, in de toepassingen op de natuurkunde, om precies te zijn bij de ontwikkeling van de thermodynamica. Warmte was tot dan toe als macroscopisch verschijnsel behandeld. Fourier had de analytische behandeling ervan wezenlijk verder gebracht. En nu schoven Krönig en Clausius daar in de jaren 1850 plotseling een waarschijnlijkheidstheoretische redenering onder over beweging van moleculen. Het probabilistisch karakter van de theorie was wel een probleem voor de tijdgenoten, maar dat is voor onze beschouwing niet de hoofdzaak. Het gevolg was overigens niet een diskrediet voor de thermodynamica, maar een opwaardering van de waarschijnlijkheidsleer.
Wat met name Ernst Mach (1838-1916) aanleiding gaf tot een sceptische opvatting ten aanzien van wetenschap überhaupt, was het ostentatief gebruik van de metafoor: moleculen bestudeerd als waren het botsende biljartballen. De theorie van de thermodynamica was onmiskenbaar succesvol in het verklaren van verschijnselen, tegelijk vond het zoeken naar een fundering in de waarneming geen bodem, er viel niets na te doen.

"Bild"

Subtieler was de reactie van Hertz (1857-1894) en van Boltzmann (1844-1906). Nu de facto de thermodynamica en tot op zekere hoogte ook de electriciteitsleer van Maxwell gegrondvest was op een schijnbaar willekeurig axiomatisch-deductief stelsel, ging Hertz over tot dezelfde actie ten aanzien van de (klassieke) mechanica. Welbewust stelde hij dat het axiomastelsel dat men onder de mathematische formulering van de fysische theorie legt, relatief vrij gekozen kon worden - vrij binnen de grenzen van aanpassing aan de waarnemingsgegevens. Het zou een kwestie van smaak zijn, van uitdrukkingskracht en van doelstelling welk plaatje,

welk "Bild", gekozen werd. Hij koos voor zijn nieuwe uitdrukkingsvorm, voor zijn alternatieve Bild, van de principes van de mechanica, omdat hij daarmee een bepaald onderdeel van de mechanica dat hij op het oog had eenvoudiger kon formuleren. Op dat onderdeel maakte hij zich het rekenwerk doenlijk.
Het cruciale belang van Hertz was dat hij de keuzevrijheid van axiomastelsels formuleerde, dat hij het soort dingen dat gekozen wordt een eigen naam geeft, Bild, en dat zijn keuzekriteria niet langer eendimensionaal zijn. Het ene plaatje was niet per sé beter dan het andere omdat het meer waarheid zou bevatten of de werkelijkheid dichter zou benaderen; nee, het ene Bild was geschikter in de ene situatie, het andere in de andere, afhankelijk van het doel wat men zich gesteld heeft. Een plaatje was een meer of minder adequate uitdrukking in het licht van een zeker doel. De introductie van het "doel" in de overwegingen betekende een tijdbom onder het idee van toegepaste wiskunde.

rekenen

De eerste universitaire leerstoel voor de toegepaste wiskunde in Duitsland werd besteed aan het rekenen. Carl Runge (1856-1927) werd in 1904 benoemd in Göttingen. Voor hem was toegepaste wiskunde de "uitvoerende macht van de wiskunde" Het ging hem om uitrekenen, om (methoden voor) het verkrijgen van concrete getalsmatige uitkomsten. Berekeningen waren steeds hoofdzakelijk aan de ingenieurs overgelaten, maar nu vond ook dit aspect zijn plaats binnen de wiskunde-beoefening. Sterker nog, in de opvatting van Runge was dit pas het "werkelijk voltrekken" van de wiskundige bewerkingen.
De numerieke analyse die Runge nieuw leven inblies, had een lange geschiedenis, met hoogtepunten bij Euler en Cauchy. Traditionele toepassingsgebieden waren de hemelmechanica, de ballistiek, de warmteleer van Fourier en de stabiliteitsberekeningen van Navier. De bijdrage van de wiskundigen bestond in het ontwikkelen van rekenmethodes om onhanteerbare mathematische objecten te benaderen.
Het werk van Heun, Runge en Kutta vervolmaakte de aanpak van het eenmalig benaderen. De Runge-Kutta-methode bood de mogelijkheid tot aanzienlijk grotere precisie dan de voorgaande en wat met het oog op de toepassingen uiterst belangrijk was: Runge bood voor deze en andere methoden rekenschema's aan, uitgewerkt in rekenvellen die zo ingevuld konden worden inclusief de nodige controleberekeningen. Wie wilde kon voor de aldus voorziene toepassingen het rekenen beoefenen als een vorm van boekhouden. Wonderlijk genoeg kwam voor deze twintigste-eeuwse activiteit de naam "Praktische Mathematik" in zwang.

schema's

Zowel het directe vervolg als een nevenontwikkeling in de numerieke analyse brachten de grenzen van de klassieke toegepaste wiskunde in zicht.
Het opstellen van schema's kunnen we achteraf herkennen als een voorbode van het programmeren van rekenmachines. Al voor de Tweede Wereldoorlog toonde het zich als een zelfstandige activiteit die niet echt strijdig was met het paradigma van de toegepaste analyse, er ook niet zonder meer onder begrepen was. Hetzelfde kan gezegd worden van het gebruik van schema's. Een gemiddeld technisch-wetenschappelijk rapport van voor 1945, bood in paragraaf twee "De theorie", een

aantal vergelijkingen met minimale uitleg en motivatie, voordat in de volgende delen het rekenwerk losbarst. Bij zo'n volkomen pragmatisme zou de term 'wiskundig model' in plaats van 'de theorie' niet verbaasd hebben.

iteratieve methoden

Naast het werk van Runge kwam een andere stijl van numeriek benaderen tot wasdom: de iteratieve methoden, dat wil zeggen herhaalde benadering telkens in de buurt van één punt van de gezochte functie. In onderscheid met de Runge-Kutta methoden wordt hier het oorspronkelijk geformuleerde object niet vervangen (door een 'nettere' uitdrukking), bovendien om ergens te kunnen stoppen met herhalen is een vooraf gegeven kriterium nodig (verschillen twee opeenvolgende benaderingen minder dan .. van elkaar dan is het goed genoeg). Met deze iteratieve methoden heeft zich een wiskundige reflectie voltrokken op het benaderen.
Ten opzichte van de diverse eerdere algorithmes om zo goed mogelijk te benaderen - en de ervaring leerde hoe goed voor de verschillende toepassingen - bood Runge-Kutta methode al de optie om zo goed als men maar wilde te benaderen; de iteratiemethoden behoefden een wiskundig uitgedrukt kriterium en gaven daarmee ook een maat voor de nauwkeurigheid van benadering. Deze wiskundige reflectie op het benaderen hield tevens een reflectie op het toepassen in zijn klassieke vorm van werkelijkheidsbenadering in. Het expliciet moeten stellen van een kriterium, een mate van werkelijkheidsbenadering, haalt natuurlijk de vraag naar voren met welk doel benaderd wordt. En zodra deze vraag werkelijk gesteld wordt, is het klassieke toepassingsparadigma verlaten.

tekenen

De praktische meetkunde diende het pegelen, het landmeten en de vestingbouw. Leerstoelen "Angewandte Mathematik" waren er in Duitsland aan de Technische Hogescholen veel eerder dan aan de Universiteiten en deze werden besteedt aan de darstellende Geometrie. Toch was het vreemd gesteld met de praktische meetkunde. Zoals er in de duytsche Mathematicque na het werk van Stevin en het leerboek van Van Schooten (de oude) nauwelijks verdere ontplooiing zat, zo leken Monge en diens leerling Poncelet welhaast de definitieve vorm van de beschrijvende meetkunde gegeven te hebben. De toepassingen breidden zich uit tot niet strikt fysiek-ruimtelijke onderwerpen als de statica, de leer van de krachten in evenwicht. Een aantal Duitse wiskundigen van wie Culmann, rond 1870, de voornaamste was, probeerden de beschrijvende meetkunde te actualiseren door inbreng van nieuwe inzichten uit de axiomatische meetkunde; het veranderde allemaal weinig aan de beschrijvende meetkunde. Een van de gevolgen is dat in de naoorlogse jaren het vak als verouderd wordt afgevoerd van het programma, zonder veel protest. Na anderhalve eeuw droeg dit onderdeel door zijn verdwijnen bij aan de verandering in de toegepaste wiskunde.

4.c 150 jaar ongeduld

Culmanns werk had langs andere weg, doordat het een belangrijke bijdrage leverde aan het grafisch rekenen, wel weer een positieve invloed op de rol van de wiskunde in de technische wetenschappen. In zijn eigen tijd echter werd Culmann niet om zijn eigen wiskundige resultaten gewaardeerd. Het leidde tot een hernieuwde receptie van Poncelets werk. Culmanns houding was illustratief voor de toegepaste wiskunde: het idee dat niets meer bevorderlijk voor een praktische toepassing zou zijn dan een theoretisch doorbraak. Culmann bereikte zo'n doorbraak. En hij begreep niet dat zo'n nieuw wiskundig inzicht opnieuw vertaling zou vragen naar de technische of andersoortige praktijk.

Dergelijk ongeduld deed de naam van de wiskunde geen goed en aan het eind van de negentiende eeuw hadden de wiskundigen aan de Technische Hochschulen in Duitsland zoveel kwaad bloed gezet dat zich in de jaren 1890 een "Anti-mathematische Bewegung" vormde.

Deze beweging reageerde op de inherente paradox van "toegepaste wiskunde": dat deze vanuit de wiskunde gezien wel toegepast was, maar in het algemeen en vanuit de techniek in het bijzonder een zuivere wetenschap. Het antwoord van Felix Klein was in hoofdzaak retorisch, hoe succesvol ook. Anderen reageerden meer inhoudelijk op de ontstane impasse: Runge, Von Mises, Hertz en anderen wezen de weg naar een nieuwe notie van bruikbaarheid van het wiskundig denken.

In het algemeen kunnen we concluderen dat de traditie van toegepaste wiskunde van binnenuit uitgehold werd.

5. 150 JAAR MATHEMATISERINGSSTREVEN

5.a Tellen en schematiseren

Het structurele ongeduld van de toegepaste wiskunde haalde het niet bij de drift van het mathematiseringsstreven. De toegepaste wiskunde was niet bescheidener in haar aanspraken op geldigheid, maar ze had zich teruggetrokken in de schijnbare vanzelfsprekendheid van de zuivere wetenschap. Wie buitenom wilde passeren met een mathematisering rechtstreeks gericht op maatschappelijk nut, moest gedurfde aannames maken. Dat degenen die een dergelijke gewaagde benadering ondernamen ook luider de trom roerden, is een begrijpelijk maar secundair kenmerk.

mathématique sociale

Laplace was niet de eerste die suggereerde om in de "sciences politiques et morales" het wiskundig denken in te zetten naar het voorbeeld van de natuurwetenschappen. Afgezien van de filosofische uitspraak bij Descartes dat zoiets mogelijk en zinvol was, kwam het concrete voorstel voor een *Mathématique sociale* al van De Condorcet. De Marquis de Condorcet (1743-1794) was in de eerste plaats wiskundige, zo beschouwde hij zichzelf en zo werd hij door zijn tijdgenoten gewaardeerd. Hij schreef over integraalrekening, over het drielichamenprobleem, over oneindige rijen en tenslotte over waarschijnlijkheidsrekening en het gebruik daarvan om de bevolking te bestuderen. Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet ontwierp een uitgebreid programma voor een hele menswetenschap, het postuum gepubliceerd in het jaar VII, dat was in 1795 - de Revolutie at hem op. Hij hield van wiskunde, "het enige dat altijd goed ging". De naam voor zijn programma had hij weloverwogen gekozen.

> "Omdat de toepassingen ervan direct betrekking hebben op sociale belangen of op de analyse van de werking van de menselijke geest en omdat ook in het laatste geval het voorwerp van toepassing slechts de door de samenleving geperfectioneerde mens is, heb ik gemeend dat de naam *mathématique sociale* het best bij deze wetenschap past.
>
> Ik geef de voorkeur aan het woord *mathématique*, hoewel dat eigenlijk niet in het enkelvoud gebruikt wordt, boven rekenkunde, meetkunde of analyse, omdat die een onderdeel van de wiskunde of een van zijn methoden aanduiden en het hier gaat om toepassing van zowel algebra, meetkunde als van rekenkunde, en omdat het hier toepassingen betreft waarin alle methodes gebruikt kunnen worden. . . . .
>
> Ik gebruik liever het woord *sociale* dan *morale* of *politique*, omdat die laatste woorden minder breed en minder precies zijn."

Condorcet heeft maar aan een heel klein stukje van zijn program invulling gegeven - toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening op het bepalen van beslissing door stemming -, maar dat is minder belangrijk. Net als bij Galilei en net als bij zijn tijdgenoot Lagrange was het cruciale punt de richting die hij aangaf. De radicale keuze voor het bestuderen van de mens met wiskundige methoden en technieken maakte hem met Saint-Simon en Comte tot grondlegger van de sociologie.

physique sociale

Condorcet pakte de waarschijnlijkheidsrekening op bij d'Alemberts afwijzing van het begrip mathematische verwachtingswaarde, van Pascal, en werkte aan het eind van zijn leven samen met Laplace (1749-1827). Poisson (1781-1840; van de Poisson-verdeling) was de belangrijkste leerling van Laplace in de waarschijnlijkheidsrekening. Op het punt van toepassing op het bestuderen van de bevolking was de Belg L.A.J. Quetelet (1796-1874) de ijverigste navolger van Laplace en Condorcet. Quetelet bepleitte op zijn beurt een *Physique sociale*, met een iets andere teneur dan het programma van Condorcet. De naamgeving refereerde aan het voorbeeld van de natuurkunde en verried een onderliggende deterministische visie op de waarschijnlijkheidsrekening. Het studie-object van de physique sociale was niet meer de mens als sociaal wezen, maar de gemiddelde mens - die waar zoveel misverstanden over bestaan, ja.
In Nederland was Rehuel Lobatto (1797-1866) de grote statisticus van zijn tijd. Lobatto was bevriend met Quetelet. Lobatto begaf zich zowel op het terrein van de feitenverzamelende statistiek, de statenkunde, als op dat van de mathematische statistiek. [Stamhuis 1989]

statistiek

De negentiende-eeuwse statistiek bestond eigenlijk uit drie takken. De eerste was wat wel genoemd werd de Kameral-Statistik, het verzamelen van alle gegevens die nodig zijn voor het bestuur (van een land of stad): economisch, geografisch, demografisch. Deze statistiek was vooral van Italiaanse en Duitse oorsprong, het was het werk van juristen en een enkele econoom. Men sprak ook wel van Statenkunde. Wie wil kan hierin een vroege voorloper zien van het MIS, Management Information System.
Specifieker was de invulling van statistiek waar gepoogd werd iets van de bevolkingsontwikkeling te begrijpen. Demografische gegevens gelardeerd met causale verklaringen waren het recept voor de "politiek rekenkunde" - die Condorcet dus te beperkt vond.
Deze beide tradities maakten dusdanig furore, dat de wetenschapshistoricus Ian Hacking de negentiende eeuw karakteriseert als "the avalanche of numbers", de stortvloed van cijfers. Ida Stamhuis spreekt van "een eeuw bedekt met cijfers". Men verzamelde gegevens in de veronderstelling zo rechtstreeks greep te krijgen op maatschappelijke processen, met een grote voorliefde voor sterfte, ziekte en zelfmoord. De negentiende-eeuwse statistici waren gefascineerd door het afwijkende, op zoek als ze waren naar het *normale*. Normaliteit en afwijking zijn negentiende-eeuwse uitvindingen. Malthus was de belangrijkste grondlegger van de

demografie in eigenlijke zin en Say een invloedrijk bestudeerder van economische wetmatigheden. Wetmatigheden zochten ze allemaal, de negentiende-eeuwse feitenverzamelaars, en dat maakt hen tot mathematiseerders pur sang.
De derde betekenis van statistiek in de negentiende eeuw was het berekenen van fouten bij waarneming, of beter het middelen van de waarnemingen - maar zo betrekkelijk zag men het in die tijd niet: er was een ware waarde, zo nam men aan, en het kwam er op aan de bedrieglijke waarneming uit te schakelen. Het ging hierbij in de allereerste plaats om astronomische waarnemingen en in mindere mate om meteorologische waarnemingen en fysische meetgegevens. Deze foutenrekening was de rechtstreekse voorloper van de huidige mathematische statistiek, en ze werd, als ze al ergens expliciet aan de orde kwam, gedoceerd door sterrekundigen. Gauß, in dienst bij een sterrenwacht, bemoeide zich ermee en krijgt nu de kromme op zijn naam.

wetenschappelijke bedrijfsvoering

Een volkomen vergelijkbare, maar veel diffusere stroom van ideeën in de negentiende eeuw was die van de science of industry. Al in de tijd van de Franse revolutie bemoeiden Monge en consorten zich met de organisatie van gestandaardiseerde massaproduktie van wapens. In het midden van de eeuw kwam een dergelijke gerationaliseerde massaproduktie werkelijk op gang in de Amerikaanse wapen-industrie. Britten, die op werkbezoek kwamen, gaven aan dit stelsel zijn naam "the American System". De Engelsman Syme publiceerde twee decennia later de verhandeling *Towards a science of industry*. De werkelijke doorbraak van de wetenschappelijke bedrijfsvoering vond echter weer in de Verenigde Staten plaats onder aanvoering van Taylor en Gilbreth. Zij waren de voormannen van de scientific management movement, waarin aan de ene kant tijds- en bewegingsstudies ontwikkeld werden en psychologische arbeidsgeschiktheidstests - met uiterst elementair gebruik van mathematische statistiek -, en waarin aan de andere kant het schematiserend bestuderen van bedrijfsorganisatie een tak van wetenschap in opkomst was, de bedrijfsleer. In Nederland waren Van Gogh, Volmer en Goudriaan buitengewoon actief op dit terrein. In Europa was de thematiek van die beweging veel breder. Men bestudeerde ook hele samenlevingen en de mogelijkheid om die efficiënter in te richten en te sturen. Het maakt achteraf in ieder geval duidelijk hoe het kon dat zoveel sociaaldemocraten zich bemoeiden met de introductie van het Taylorstelsel en verwante technieken.
Internationaal gezien werd de wetenschappelijke pretentie van het scientific management op de spits gedreven door een groep die zich de technocratische beweging noemde. Het gevolg was een scheiding der geesten in 1930-31. Een scientific management movement bleef bestaan - het streven naar Quality Control en rationalisatie in de industrie kwam uit die hoek -, maar de wetenschappers scheidden zich af en beoefenden sindsdien de management science. In Nederland zou het tot na 1960 duren eer die stroom zich als wetenschap vestigde: de bedrijfskunde.

Operations Research

Het is de moeite waard nog even stil te staan bij de bedrijfskunde. In de Tweede Wereldoorlog ontstond, zegt men, in legerkringen de Operations Research. Het zou vooral te danken zijn geweest aan wis- en natuurkundigen die wel werden opgeroepen in het leger maar niet als kanonnevoer, doch met medename van hun hersenen. Zij zouden het bestuderen van logistieke en andere problemen van militaire operaties op hoger plan gebracht hebben: Operations Research. In Engeland was de verklaring iets anders: de wetenschappers zouden hun onderzoek naar de beste logistiek niet in theorie hebben mogen afronden, maar in de praktijk van de operatie hebben moeten voortzetten, onderzoek in actie: Operational Research. Beide verklaringen zijn ongetwijfeld waar, ze zijn buitengewoon incompleet. De "grondleggers" van de Operations Research konden immers bouwen op een inmiddels gevestigde traditie van onderzoek naar werking en logistiek van bedrijven en organisaties: Operations Analysis, een deskundigheid die in de jaren dertig tot wasdom was gekomen binnen de management science.
Het toonaangevende tijdschrift op dit moment heet *MS/OR*, wat staat voor *Management Science/Operations Research.* Men wenst geen scheiding tussen beide te maken. Bestond de aanpak op dit gebied aanvankelijk uit een impliciete mathematisering resulterend schematiseren en een algemeen speuren naar wetmatigheden, in tweede instantie werd met de studie van Markov-ketens en de mathematische theorie van optimalisering het wiskundig karakter van het werkterrein veel beter zichtbaar. George B. Dantzig was in de jaren vijftig de grondlegger van het mathematisch programmeren, lineaire optimalisatie. In Nederland leverden J.F. Benders (Benders-decompositie) en G. Zoutendijk in de jaren vijftig vooraanstaande bijdragen aan dit gebied.
Onder wiskundigen in Nederland was het hele gebied dusdanig onbekend en onbemind in de jaren vijftig dat in 1957 D. van Dantzig nog in staat was om onder algemene bijval een nieuwe naam te introduceren voor de wiskundige kant van het werkterrein, namelijk *besliskunde*. Heden ten dage kan men in Nederland aan de naamgeving nog de herkomst van de leerstoelen herkennen. Operations Research staat hier voor een op de bedrijfspraktijk georiënteerde opdracht. Besliskunde is hetzelfde vak, maar dan opgevat als onderdeel van de wiskunde.

5.b Tinbergen

In de negentiende eeuw hadden Cournot en Walras pogingen gedaan om naar het paradigma van de toegepaste wiskunde een fysica van de economie te ontwikkelen. Hen zag Jan Tinbergen als grote voorbeelden toen hij op zoek was naar een algemene theorie van conjunctuurgolven. Hij zocht naar een theorie die de bewegingen kon verklaren uit de eigenschappen van het systeem dat de economische verschijnselen beschreef. Daarin slaagde hij niet volledig. Wat hij vond was iets anders. De uitkomst van zijn speurtocht zegt iets over de mogelijkheden om wiskunde te gebruiken. Dit betekent dat we Tinbergen anders beschouwen dan

Galilei, Lagrange en Condorcet bij wie de aannames en de manier waarop zij het probleem formuleerden doorslaggevend waren. Tinbergen bekijken we naar zijn succesvolle mislukking: het resultaat was niet een theoretische economie naar het voorbeeld van de fysica, zoals hij zich gewenst had, maar een praktisch hanteerbare en pragmatische nieuwe wetenschap.

ingenieurswetenschap

Tinbergen (1904-1994) was in de eerste plaats een geestverwant van de maatschappelijk vooruitstrevende tellers en statistici van de negentiende en de bedrijfs- en maatschappij-rationaliseerders van de twintigste eeuw. Goudriaan was, om het zo te zeggen, binnen de sociaaldemocratische beweging een directe concurrent. Wat Tinbergen dreef was de zorg om verspilling en dan in de eerste plaats de verspilling van menselijk talent door werkloosheid. Hij behoorde tot een club van aanstormende jonge sociaaldemocraten in de jaren twintig die bereid waren hun carrière in dienst te stellen van het maatschappelijk en politiek ideaal om daaraan iets te doen. Het toppunt van zijn gezag bereikte Tinbergen in 1970, toen de eerste Nobelprijs voor de economie toegekend werd aan hem en aan de Noor Ragnar Frisch. Het hoogtepunt van directe politiek invloed, althans in Nederland, lag veel eerder, toen hij na de Tweede Wereldoorlog het CPB, het Centraal Planbureau mocht inrichten en leiden naar zijn econometrische inzichten. Dit gebeurde echter allemaal op grond van zijn fundamentele bijdragen aan de nieuwe wetenschap der econometrie, een *ingenieurswetenschap* noemde hij die, en aan de (sociaaldemocratische) gedachtenvorming over de mogelijkheid van het voeren van een economisch beleid.

absolute theorie

Tinbergen was een leerling van de natuurkundige Ehrenfest, iemand die wars was van het moderne gedoe van theorie-tjes die voorlopig waren en niet echt waar hoefden te zijn, wars dus ook van iedere relativering van het idee van toegepaste wiskunde. Tinbergen zocht in diens geest naar een absolute theorie van economische golfbewegingen en faalde op buitengewoon grootse wijze. De mislukking bracht hem de techniek van het opstellen van macro-economische modellen. Dergelijke modellen zijn voorbeelden van wiskundige modellen en dat is de reden om er hier zoveel aandacht aan te besteden. Juist de poging om tot het uiterste vast te houden aan de klassieke toegepaste wiskunde leverde de omslag naar de nieuwe manier van bruikbaar maken van het wiskundig denken op, het wiskundig modelleren. Tinbergen had dan ook gelijk dat hij de econometrie beschouwde als ingenieurswetenschap: hier was het gebruik van wiskunde tot een techniek geworden.

Een voorbeeld van een mechanisme dat vertragingsgolven vertoont is het volgende model. De volgende economische grootheden worden beschouwd:
L het arbeidersinkomen,
Z het niet-arbeidersinkomen, kortweg "winst" te noemen,
U de waarde der verkochte consumptiegoederen,
V de waarde der verkochte investeringsgoederen,
De volgende betrekkingen worden aangenomen tussen deze grootheden, welke alle worden gemeten als afwijkingen van een bewegend evenwicht.

(1) De winstvergelijking....

$$Z = U + V - L$$

(2) .... een vertraging aangenomen van één tijdseenheid ....

$$V_t = \beta Z_{t-1}$$

(3)....de uitgaven voor consumptiegoederen ....

$$U_t = L_t + \epsilon_1 Z_{t-1} + \epsilon_2 (Z_{t-1} - Z_{t-2})$$

Men vindt op eenvoudige wijze dat voor b.v. Z de bewegingsvergelijking geldt:

$$Z_t - (\beta + \epsilon_1 + \epsilon_2) Z_{t-1} + \epsilon_2 Z_{t-2} = 0$$

[Tinbergen 1938: pp. 145,146] 'Vertragingsgolven en levensduurgolven', J. Tinbergen, in: *Strijdenskracht door Wetensmacht; Opstellen aangeboden aan S. de Wolff ter gelegenheid van zijn 60e verjaardag*, J. v.d. Wijk e.a.(red.), Amsterdam: Arbeiderspers, 1938, pp. 143-150.
Zo besprak Tinbergen in een artikel uit 1938 over conjunctuurgolven een model, een zeer elementair voorbeeld van zijn economische modellen, alsof het de gewoonste zaak van de wereld was. Twee jaar eerder echter had hij hard gewerkt om dit te mogen doen, in het beroemde Prae-advies voor de Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek over de vragen: "Kan hier te lande, al dan niet na overheidsingrijpen, een verbetering van de binnenlandse conjunctuur intreden, ook zonder verbetering van onze exportpositie? Welke leering kan te aanzien van dit vraagstuk worden getrokken uit de ervaringen van andere landen?".
[Tinbergen 1936] 'Prae-advies van Prof.dr. J. Tinbergen', J. Tinbergen, in *Prae-adviezen over de vragen: Kan .... landen?*, H.A. Kaag e.a.; Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek, 's Gravenhage: Mart. Nijhoff, 1936, pp.62-108.

Fig. 2. Elementair voorbeeld van wiskundig modelleren bij Tinbergen

Doel-matigheid

Het denkbeeld dat Tinbergen, als leerling van Ehrenfest, aangereikt kreeg, was dat van een wiskundige structuur die een werkelijkheid afbeeldt doordat ze de vrij gestelde uitbeelding is van een visie op die werkelijkheid. Die visie kon een axiomastelsel zijn, maar evengoed een fysische theorie. De uitbeelding was een wiskundig object. Voor dit wiskundig object had Hertz al aangegeven, en de latere auteurs herhaalden het, dat het consistent, correct als afbeelding en doelmatig moest zijn. Het waren de gebruikelijke eisen aan een wetenschappelijke theorie, met dien verstande dat ditmaal uitdrukkelijk vermeld was dat die correctheid en die waarheid betrekking hadden op een partiële afbeelding en verschillende beelden konden toelaten. Volgens Hertz waren die meerdere beelden vergelijkbaar, men kon een "beste" kiezen. Het beste beeld was dat wat het meest terzake was: ten eerste het zuinigste - zonder overbodige elementen -, ten tweede het gemakkelijkste met het oog op berekening of andere doeleinden. Wat het beste beeld was, hing dus af van het doel. Het doel van wetenschap had tot dan toe eenduidig vastgelegen, namelijk de essentie van de betroffen werkelijkheid weer te geven, "waarheid" in hogere zin. Het doel, en daarmee het geschiktheidskriterium van de wiskundige uitbeelding, lag nu dus open.

Was hiermee een niet mis te verstane relativering gegeven van het ideaal van wetenschappelijkheid, de variatie in doelstellingen liet daarenboven heel andere oriëntaties toe. Het doel waarvan de geschiktheid van de wiskundige structuur afhing, kon nu evengoed iets anders zijn dan partiële of voorlopige waarheid. Mne had de vrijheid een zekere bescheidenheid te betrachten ten opzichte van het wetenschapsideaal. Het doel kon van alles zijn, met name een praktisch of maatschappelijk doel.

sturing als doel

Tinbergen benutte de ruimte, de denkvrijheid, die hier aan de pragmatische opstelling geboden werd. Zijn doel was sturing van de beschreven werkelijkheid. Bij Tinbergen was deze intentie het motief om zich überhaupt met conjunctuurverschijnselen bezig te houden: crisisbestrijding. Hoofdeis was wel "dat de gang van zaken in het mechanisme met de werkelike gang van zaken overeenstemt", maar we hoeven strikt genomen niet de oorzaken te kennen, slechts "de opeenvolging der gebeurtenissen en hun samenhang te beschrijven; "slechts" de *gevolgen* van *maatregelen* die men neemt" [Tinbergen 1933: p.74].

Tinbergen stond bepaald niet alleen in zijn streven naar maatschappelijke sturing, zelfs niet in zijn streven naar de inzet van wetenschappelijke middelen voor dit doel. Het was overigens gebruikelijk vast te houden aan de aanduiding "wetenschap" en zo ging een bescheiden pretentie door relativering van het wetenschapsideaal, gepaard aan een in toenemende mate onbescheiden pretentie in maatschappelijk opzicht.

In de jaren dertig debatteerde men in brede kring over de wenselijkheid en de mogelijkheden van maatschappelijke sturing. Tinbergens positie in dat debat was bijzonder doordat hij meende dat sturing wenselijk was omdat de mogelijkheden ertoe wetenschappelijk onderbouwd waren. In 1936, op het hoogtepunt van het debat, zocht de Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek onder andere bij Tinbergen pre-advies op zodanige vragen dat de beantwoording binnen het bereik van het gebruik van wiskundige beelden kwam: "Kan hier te lande, al dan niet na overheidsingrijpen, een verbetering van de binnenlandse conjunctuur intreden, ook zonder verbetering van onze exportpositie? Welke leering kan te aanzien van dit vraagstuk worden getrokken uit de ervaringen van andere landen?".

Het gaat, stelde Tinbergen, bij deze vragen om *repercussies van de ene economische grootheid op de andere*, macro-economisch te beschouwen, maar:

> "De kwalitatieve stylering, d.w.z. indeling van mensen, goederen enz. in grote groepen is nog niet voldoende. Er moet met *getallen* gewerkt worden; kwantitatief gestyleerd worden" ... "Ik concludeer dus tot de noodzakelijkheid van de *kwantitatieve stylering van het economisch proces*".

Daarop introduceerde hij de beschouwde grootheden. Hij beeldde met andere woorden zijn visie, stylering, uit en noemde voor het eerst het beeld "model":

> "... het "model" dat in het volgende gegeven wordt van het Nederlands economisch leven...".

En toen de 24 basisvergelijkingen van het "model" waren gegeven, heette het geruststellend dat er geen principieel onderscheid was tussen de hier gevolgde methode en de gebruikelijke economische redeneringen:

> "de relaties ... worden nu in de mathematische machine geworpen en het resultaat komt er min of meer pasklaar uit.
>
> ... Met het economisch model is het soortgelijk. Als een beginsituatie gegeven is, dan zijn met behulp van het beschreven vergelijkingenstelsel alle daarop volgende *systematische* bewegingen uit te rekenen".
>
> [Tinbergen 1936: p. 67; 68; 69; 92 -cursiveringen in origineel]

Binnen deze ene verhandeling had Tinbergen er welbewust naar toe gewerkt het begrip model te poneren en zonder aanhalingstekens te mogen gebruiken. Hij en vele andere deden dat sinds 1936 onbekommerd.

6. VAN THEORIE NAAR MODEL

Het idee van toegepaste wiskunde, waarvoor de analytische mechanica van Lagrange model had gestaan, was weliswaar van binnenuit en van buitenaf uitgehold (gerelativeerd), zoals we in hoofdstuk 4 en 5 zagen, dat betekende echter nog niet dat het vervangend begrip, wiskundig model, zomaar geaccepteerd werd. In dit hoofdstuk komt aan de orde welke obstakels genomen moesten worden en welke lastige denkstappen gezet, voor de wiskundigen overgingen tot nieuwe woorden en nieuwe manieren van doen. In de eerste plaats was de term wiskundig model "bezet". Het was wel duidelijk dat de noties van waarheid en theorie op drift waren en dat de wiskunde daarbij een wezenlijke rol vervulde, maar dit werd besproken in de minder specifieke begrippen als hypothese, model, analogie en metafoor. In de tweede plaats was de situatie niet zo duidelijk. Binnen de turbulente ontwikkeling van de natuurkunde was de rol van de wiskunde juist een van de cruciale kwesties in het debat. Bij verschillende opvattingen van wetenschap hoorden uiteenlopende visies op de bijdrage van het wiskundig denken. In de derde plaats was de expansiedrang van de wetenschappelijke aanpak, het scientisme van de periode rond 1900, een verwarrend gegeven. Wiskunde heette de "grammer of science".
Dezelfde intellectuele beweging die we reeds waarnamen bij de relativering van "toegepaste wiskunde" kunnen we nu iets diepgaander behandelen.

gips, draad en karton

De productie van wiskundige modellen was honderd jaar geleden een bescheiden nijverheid. Uitgevers en ondernemende professoren legden zich toe op het vervaardigen van modellen in draad, gips en karton. Hoogtijdagen waren de grote tentoonstellingen in Kensington Park, Londen 1872, en in München 1893.
Men treft in de meeste universiteiten nog restanten aan van de destijds met liefde aangelegde modellenverzamelingen. In Delft onderhielden de wiskundigen een modellenkabinet.
Veraanschouwelijking van wiskundige samenhangen is het nut van zulke objecten en dat was indertijd speciaal relevant, omdat de theoretische ontwikkeling van de analyse de behandeling van hogeregraads oppervlakken binnen bereik had gebracht. En zelfs voor de bijziende Ludwig Boltzmann zei de aanblik van zo'n model meer –en stimuleerde de wiskundige creativiteit meer– dan bladzijden vol formules. Sindsdien, in de twintigste eeuw, is het aanschouwelijk element in de wiskunde-beoefening verder op de achtergrond geraakt, dankzij een radicalisering van diezelfde theoretische ontwikkeling. Pas de laatste tien jaar keren het plaatje en het draadmodel terug in de belangstelling. De gipsmodellen zijn weer te koop, de boeken over fractals mogen zich in een breed publiek verheugen en het is niet ongebruikelijk een wiskundige aan te treffen achter zijn kleurenscherm, wachtend op het volgende plaatje.

6.a De blokkade van Boltzmann

kickable

Ludwig Boltzmann (1844-1906) werd door de gipsmodellen geblokkeerd in zijn filosofische creativiteit. Hij beschikte over alle elementen en over de visie om het hedendaagse begrip wiskundig model te formuleren en weigerde met zoveel woorden. Boltzmann schreef erover in 1892 en verzorgde tien jaar later het lemma 'Model' in *The Encyclopaedia Brittanica*, maar kon woordcombinatie *wiskundig model* niet uit zijn pen krijgen. Een model moest *tastbaar* zijn: "kickable". Hij signaleerde scherp dat Hertz, Mach en Planck anders omgingen met de wiskunde in de fysica, dan tot dan toe gebruikelijk was, dat ze hun waarheidsoordeel opschortten en zich lieten leiden door overwegingen van denkeconomie, dat mechanische modellen een belangrijke functie hadden in die nieuwe ontwikkeling –en daar hield het op. Boltzmann had voor zichzelf de blokkade van de tastbaarheid opgeworpen.

working model

Philip E.B. Jourdain (1879-1919) schreef een reeks ongewoon scherpzinnige artikelen over de conceptuele ontwikkeling van de logica, de wiskunde en de mathematische fysica. Hij gaf werk van De Morgan, Boole, Cantor, Lagrange, Jacobi, Gauss en Mach in het Engels uit en was oprichter-redacteur van *Isis*. Hij was als weinig Engelse tijdgenoten op de hoogte met Duitse ontwikkelingen in de theoretische fysica en in de filosofie. Hij was een groot bewonderaar van Ernst Mach, vertaalde diens werk, en deed wat we op grond daarvan niet mochten verwachten: in het boekje *The nature of mathematics* uit 1912 poneerde hij het begrip wiskundig model. Jourdain werd niet gehinderd door de conceptuele problemen van Hertz en Mach of de barrière van Boltzmann die hem bekend moeten zijn geweest. Hij stelde eenvoudig dat het doel van veel wiskunde *beschrijving* was, eenvoudige en voorzover mogelijk nauwkeurige beschrijving van zintuiglijk waargenomen dingen; dat een goed beeld geen letterlijke nauwkeurigheid beoogde, doch slechts een concrete indruk gaf - dikwijls een betere indruk dan een model, een model in was bijvoorbeeld.

> "Our ideal in natural science is to build up a working model of the universe out of the sort of ideas that all people carry with them everywhere 'in their heads', as we say, and to which we appeal when we try to teach mathematics".

De bedoelde ideeën in ons hoofd waren die van getal, orde en numerieke maten van tijd en afstand enzovoorts. Zo'n model, voegde Jourdain eraan toe, werd dikwijls opgesteld uit praktische behoefte, de behoefte te voorspellen. Zo was de zeevaart-almanak samengesteld op basis van een model van het zonnestelsel.

> "Indeed, the 'world' with which we have to deal in theoretical or mathematical mechanics is but a mathematical scheme, the function of which it is to imitate, by logical consequences of the properties assigned to it by definition, certain processes of nature as closely as possible. Thus our 'dynamical world' may be called a model of reality".

En dit model moet niet verward worden met de werkelijkheid zelf, waarschuwde Jourdain meteen:

> "Thus with a purely mathematical model of the solar system, we can tell, with an approximation which depends upon the completeness of the model, the relative positions of the sun, stars and planets several years ahead of time; this it is that enables us to publish the *Nautical Almanac*, and makes up to us, in some degree, for our inability 'to grasp this sorry scheme of things entire... and remould it nearer to the heart's desire' "[Jourdain 1956: pp. 43,44].

Het waren dus wiskundige substanties waaruit Jourdain's 'working model' was opgebouwd. Dit bijna plastische platonisme onderscheidde hem van zijn tijdgenoten en stelde hem in staat van model te spreken. Wonderlijk genoeg vond Jourdain hierin geen navolging bij de Wiener Kreis, bij Von Mises of bij Carnap. Het begrip moest decennia later opnieuw uitgevonden worden.

niets mysterieus

Toch sprak in datzelfde jaar, 1912, in totaal verschillende context een volkomen ander type wiskundige van "wiskundig model". De fransman Emile Borel was in de eerste plaats praktizerend wiskundige. Hij bestreek een breed terrein van zuivere en toegepaste wiskunde en begaf zich niet, zoals Jourdain, in logische reflecties. Borel was uitgenodigd om in de Verenigde Staten een nieuw onderzoeksintituut, het Rice Institute, te openen. Hij sprak veel lichtvoetiger over de bruikbaarheid van wiskunde dan Jourdain en vond de toepasbaarheid helemaal niet gek:

> "Het mag duidelijk zijn dat er niets mysterieus schuilt in het gegeven dat de wiskundige theorieën die opgesteld waren naar het model van bepaalde verschijnselen, verder ontwikkeld konden worden en een model van andere verschijnselen konden verschaffen; dit gegeven verdient toch even onze aandacht, want het heeft een belangrijke praktische consequentie: als nieuwe fysische verschijnselen wiskundige modellen opperen, dan zullen de wiskundigen zich aan het onderzoek van deze nieuwe modellen en de generalisaties ervan moeten zetten, in de gerechtvaardigde hoop dat de aldus gevormde nieuwe wiskundige theorieën vruchtbaar zullen blijken, door op hun beurt de natuurkundigen nieuwe denkvormen aan te reiken"[Borel 1912].

Van Borel kan men, anders dan van Jourdain, met geen mogelijkheid volhouden dat hij niet beroemd was, of minder bekend zou zijn onder de actieve wiskundigen en toepassers. Deze rede werd ook zowel in het Frans als in het Engels ruim gepubliceerd. Toch was noch de rede noch het artikel over 'Modèles arithmétiques' uit hetzelfde jaar voldoende om een introductie van het wiskundig modelbegrip op te roepen.

Het idee was dus voorhanden, maar Boltzmann was klaarblijkelijk niet de enige met bezwaren.

6.b Het beeld van Hertz

Er was dus een echt probleem met die blokkade van Boltzmann en niet zomaar een persoonlijk verbod. We kunnen aan het uitblijven van verbreiding van het door Jourdain en Borel geopperde begrip zien, dat er strijd was, concurrentie van opvattingen over wiskunde.

De status van natuurkundige theorieën en die van toegepaste wiskunde waren nauw verbonden en stonden samen op de tocht door de opeenvolgende acceptatie van de kinetische gastheorie en de theorie van elektriciteit en magnetisme. Hier was zo duidelijk sprake van metaforen, de metafoor van biljartballen en die van stromende vloeistof, dat het waarheidsgehalte van deze theorieën in twijfel werd getrokken. Tegelijk waren deze theorieën zo succesvol in het verklaren, voorspellen en technisch beheersbaar maken van verschijnselen, dat ze gewoon geaccepteerd werden. In de fysica verslikte men zich in een determinisme- en causaliteitsdebat. Ernst Mach nam met zijn opvatting dat alles metafoor was een radicale positie in. Hij gaf ter adstructie een historisch-kritisch overzicht van de totstandkoming van de mechanica tot in zijn tijd. Met dat metaforische kwam de rol van de wiskunde eigenlijk helemaal niet meer aan bod.

Heinrich Hertz (1857-1894) werd door Mach gezien als bondgenoot in het relativeren van de waarde van theorie, maar Hertz zelf is daar nooit op ingegaan. Het kan zijn dat de inleiding van zijn hieronder te beschrijven boek in zekere zin een reactie was tegen Machs visie. Hertz' *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt* verscheen nog wel op zijn aanwijzingen, maar na zijn dood. Dat het in 1894 meteen als deel 3 van zijn verzameld werk gepubliceerd werd, zegt voldoende over zijn roem. Hertz reageerde met zijn boek net als zijn tijdgenoten op het verlies van status van fysische theorieën. Als de waarde van die nieuwe theorieën zo betrekkelijk was, gold dat dan ook niet voor de mechanica? Sterker nog, borg niet de mechanica net zulke problemen in zich als die andere en moest ze daarom niet anders geformuleerd worden? Hertz had in het bijzonder de "Systemen mit verborgenen Massen" op het oog; daar wilde hij beter aan kunnen rekenen en dan was een andere weergave van de theorie dienstig. In de inleiding van het boek legde hij uit hoe hij met theorieën omging, namelijk als "Bilder":

> "Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen ist dieses: wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äusseren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände"[Hertz 1894: p. 1]

Hertz signaleerde nog dat, wilde aan die eis voldaan kunnen worden, er op voorhand zekere overeenstemming tussen de natuur en ons denken (unserem Geiste) moest zijn, maar liet het daar verder bij: de ervaring leerde immers dat dit het geval was. De "beelden" hoefden overigens slechts op één punt met de dingen overeen te stemmen: dat de logische (denknoodzakelijke) gevolgen van de beelden weer beeld waren van de natuurnoodzakelijke gevolgen van de afgebeelde voorwerpen. Verdere overeenkomst tussen onze voorstelling en de dingen was voor het doel niet nodig, zei hij, en konden we ook niet kennen.

> "Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äusseren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifen auftreten werden;..."

Afgezien van die passages bij Borel en Jourdain –en zelfs in deze passages lijkt het of Jourdain Hertz op de voet volgde–, leek het nog een halve eeuw te moeten duren voor het "zoals" weggelaten kon worden, voor het "wie an Modelle" vervangen werd door: "in een wiskundig model", voordat, anders gezegd, model niet meer strikt fysiek opgevat hoefde te worden. Hoe moeilijk het was het aspect van het materiële los te laten toonde een terugblik van A.D. Fokker uit 1952:

> "Beproefde men vroeger de onstoffelijke verschijnselen te verklaren met behulp van mechanisch tastbaar stoffelijke modellen, thans beproeft men de tastbare stof te doorgronden met de denktuigen ontleend aan de studie van onstoffelijke straling"[Fokker 1952].

drie kriteria

Niettemin formuleerde Hertz voor zo'n Bild een drietal kriteria, die niet langer te verzoenen waren met het benaderingsparadigma van de klassieke toegepaste wiskunde. Een goed beeld is, meende Hertz, **toelaatbaar**, **correct** en **doelmatig**. Het eerste was de interne eis niet in strijd te zijn met "de wetten van ons denken" –"logisch zulässig" zei Hertz–: (logische) **consistentie**. Correctheid was de eis van **overeenstemming** met het afgebeelde. Onjuist noemde hij een toelaatbaar beeld wanneer de essentiële relaties in strijd waren met de relaties tussen de dingen buiten. Door het stellen van deze twee kriteria legde Hertz de vinger op de feilbaarheid van theorievorming, en relativeerde zo het paradigma van werkelijkheidsbenadering. Maar hij ging een stap verder.

Van twee toelaatbare correcte beelden van hetzelfde voorwerp was dat het doelmatigst wat de meeste wezenlijke relaties van het voorwerp weerspiegelde, wat het duidelijkst was. Bij gelijke duidelijkheid was het eenvoudigste beeld het meest efficient. Over de doelmatigheid kon verschil van mening bestaan; het ene beeld kon voor het ene doel, het andere voor het andere **doel** voordelen bieden. Zo was het Hertz in navolging van Von Helmholtz speciaal te doen om "cyklische Systeme", met name om "Systeme mit verborgenen Massen", waarmee hij de grotere doelmatigheid van zijn Bild in vergelijking met het Newton-Lagrange-Bild van de mechanica wil laten zien op het punt van potentiële energie.

> "Die Aufgabe, welche der Mechanik in Hinsicht der Systeme mit verborgenen Massen zufällt ist diese: die Bewegungen der sichtbaren Massen des Systems oder auch die Veränderungen der sichtbaren Koordinaten des Systems vorauszubestimmen trotz der vorhandenen Unkenntnis über die Lage der verborgenen Massen" en:
>
> "Die kinetische und die potentielle Energie eines konservativen Systems unterscheiden sich von einander nicht durch ihre Natur, sondern nur durch den freiwilligen Standpunkt unserer Auffassung, oder die unfreiwillige Be-

schränkung unserer Kenntniss von den Massen des Systems."[1]

afzien van benadering

De doelmatigheidsoverweging leidde dus niet alleen tot het pragmatisch opschorten van de werkelijkheidsbenadering zoals we dat bij Navier al zagen. Het kon doelmatig en correct zijn om welbewust af te zien van gedetailleerde weergave van de werkelijheid en toch over te gaan tot een wiskundige formulering. Men kan dus bewust streven naar uiterlijke beschrijving –nu zeggen we "black box benadering"– en die vrijheid bood het oude toegepaste-analyse-paradigma van toegepaste wiskunde niet.

Hertz herhaalde een algemeen kenmerk van negentiende-eeuwse wetenschap, van onderzoek, namelijk dat de principes hun status van metaphysisch inzicht verloren hadden, en hij trok er de consequentie uit. Ieder stelstel uitspraken waaruit zich, zonder beroep op de empirie, de hele mechanica zou laten afleiden, voldeed als "principes". Verschillende stelsels kon men beoordelen en vergelijken op toelaatbaarheid, correctheid en doelmatigheid. Zoveel van het oude wetenschapsideaal beheerste echter zijn denken nog dat hij meende dat uiteindelijk één Bild het juiste en meest doelmatige zou zijn.

De natuurkunde van de twintigste eeuw zou, met zijn telkens wedijverende theorieën, zijn pogingen tot cruciale experimenten en zijn pogingen tot unificatie, Hertz' visie van concurrerende Bilder volkomen bevestigen. De praktijk was er dus wel naar, toch zou het in de mathematische fysica pas in de jaren 1960 gewoon zijn om van wiskundige modellen te spreken.

Bild ist Modell

Hertz' begripsvorming werd voortgezet door Boltzmann en Jourdain. Wittgenstein pakte de draad van het begrip Bild op: "Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit". Planck sprak van een "modellmässige Idealisierung". Deze conceptuele ontwikkelingslijn onderscheidde zich door de nadruk op de logisch-mathematische aard van Bild of model, van de school van Mach met zijn nadruk op metaforen.

In een analogie of een metafoor is de gemeenschappelijke structuur van twee dingen (die men desnoods model van elkaar zou kunnen noemen) de verborgen overeenkomst. "Bild" of "model" maakte die overeenkomst expliciet en zelfstandig[2].

---

[1] [Hertz 1894: p. 253, 256] Een systeem was bij Hertz steeds een stoffelijk stelsel (van puntmassa's). Hertz' bestudering van cyclische systemen met "zurücklaufende Bewegung" maakte terugkoppelingsverschijnselen theoretisch expliciet en was een scharnierpunt in de inhoudelijke ontwikkeling van de toegepaste wiskunde. Het was een van de belangrijkste toevoegingen op de in de lijn van Newton en Lagrange ontwikkelde wiskundige vergelijkingen - en het functioneerde als hefboom voor de formulering van zijn Bild -. Later kwam juist deze wiskunde terug in de conjunctuurcykels in de econometrie van Tinbergen en in de cybernetica van Norbert Wiener. Onder invloed van de laatste was terugkoppeling een magisch begrip in de jaren vijftig.

[2] Modeltheorie: De hier beschreven aanzet tot het begrip wiskundig model werd beheerst door de context van een in het algemeen logicistische opvatting van de wiskunde. Dat wil zeggen men stelt wiskunde en axiomastelsel aan elkaar gelijk. Bij Hertz werd het niet echt duidelijk of het Bild nu het axiomatisch stelsel was of de mathematische uitwerking ervan. Jourdain identificeerde beide zonder meer. Scherp onderscheid vinden we pas bij Van Dantzig en bij Wiener.

z.o.z.

> "Die Übereinstimmung Geist und Natur läßt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modellen von einander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, daß der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten"[Hertz 1894: p. 199].

Zo vergeleek Hertz Bild en Modell. Al in Hertz' tijd was het niet ongewoon een beroep te doen op gedachtenmodellen, net als op gedachtenexperimenten. Het atoommodel van Bohr is wellicht het bekendste uit die sfeer, het biljartballenmodel voor de thermodynamica kwamen we eerder al tegen. Hoezeer zulke gedachtenmodellen ook hingen op de mathematische formulering de overgang naar mathematische modellen vereiste een reflectiestap in andere richting.[3]

nothing assumed

Willard Gibbs deed in 1902 al wel iets dergelijks in zijn *Elementary principles in statistical mechanics* (*Developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*):

> "Difficulties of this kind have deterred the author from attempting to explain the mysteries of nature and have forced him to be contented with the more modest aim of deducing some of the more obvious propositions relating to the statistical branch of mechanics. Here, there can be no mistake in regard to the agreement of the hypotheses with the facts of nature, for nothing is assumed in that respect"[Gibbs 1902]

willekeur

Maar deze resignerende houding kon bij de Duitse collega's geen genade vinden. Met name Tinbergens leermeesters in Leiden, Paul en Tatjana Ehrenfest, toen nog werkzaam in Sint Petersburg, bespraken Gibbs' uitvlucht streng in hun overzichtsartikel uit 1911 voor de grote *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Wie Gibbs zou volgen, moest de volgende consequenties onder ogen zien:

> "Die kinetische "Erklärungen" werden zu *Abbildungen* und dementsprechend jene beiden Gruppen von "Hypothesen" zu *willkürlichen Festsetzungen über den Aufbau des abbildenden Schemas*; nämlich zu Festsetzungen
> 1) über die Struktur des Gasmodelles

De verhouding van logica en wiskunde was intussen inzet van heet grondslagendebat in de eerste decennia van de twintigste eeuw. De relatie tussen formele logica en wiskunde werd als verhouding tussen uitspraak en realisatie of interpretatie gesteld en rond 1950 expliciet gemaakt in de modeltheorie van Tarski. Hierin trad een wiskundige theorie op als model in de zin van uitbeelding of realisatie van een logische calculus. Het optreden van wiskundige objecten als model zou hebben kunnen helpen het verbod van Hertz en Boltzmann –model moet tastbaar zijn– te doorbreken, temeer daar degenen die het begrip wiskundig model formuleerden hun achtergrond hadden in de grondslagen van de wiskunde.

[3] De constructie van mechanische modellen waaraan plaatsvervangend gemeten werd, kende een tak van twintigste-eeuwse praktische wiskunde die zich meer en meer toespitste op de bouw van analoge rekenapparaten: zowel mechanische constructies, als electrische circuits. Het bekendst zijn de differential analysers van Vannevar Bush en van Douglas Hartree uit de jaren dertig.

2) über die Auswahl der Bewegungsschar"[Ehrenfest 1911].
Het grote probleem van Ehrenfest was natuurlijk de willekeur. Toch was die willekeur, de mathematische willekeur die men ook positief kan formuleren als de mogelijkheid zijn objecten vrij te stellen, een kernpunt van het wiskundig model.

drie stromingen

Zo waren er drie stromingen in het denken over de rol van wiskunde in de wetenschappen, in de fysica in het bijzonder. Er waren er die zeiden niets aan te nemen (Gibbs): alles was slechts metafoor (Mach); slechts een teken- en symbolenwerk (Wiener Kreis; semiotiek –hier niet behandeld, GA); slechts afspraak (vergelijk het hier niet behandelde conventionalisme van Poincaré en anderen, GA). Als deze auteurs hadden weinig oog voor het zelfstandig karakter van wiskundige structuren die twee leden van een analogie met elkaar verbinden. Een tweede stroom van denkers had minder moeite de rol van wiskunde te onderkennen en een zelfstandig karakter toe te kennen. Zowel Borel als Jourdain lijken dat gemakkelijk te verwoorden, en gebruiken het begrip wiskundig model (!), op grond van een zodanige variant van de platonistische opvatting van wiskunde, die het hen toestaat de wiskundige objecten zelf als bijna tastbaar te behandelen. Deze auteurs lijken dan ook nauwelijks zwaar te tillen aan het probleem van de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid.
De derde stroom is het meest zwaar op de hand. Von Helmholtz, Hertz, Boltzmann en Ehrenfest zijn eigenlijk niet van zins de waarheidsaanspraak van de natuurwetenschap op te geven: geen willekeur, conventie of gemakkelijk platonisme of pragmatisme. Van deze groep kan men weer zeggen dat ze aanvankelijk moeite heeft om het positieve van de willekeur, namelijk het vrij stellend karakter van het wiskundig denken, te waarderen. Het is dit schijnbare conservatisme dat uiteindelijk leidt tot een stabiele, want zwaar bevochten, introductie van het begrip wiskundig model. Dankzij Ehrenfest was deze stroming in Nederland goed vertegenwoordigd. Naast Tinbergen, die we in het vorige hoofdstuk reeds behandelden, was Burgers in dit opzicht een belangrijk leerling van Ehrenfest.

6.c De mathematische voorbeelden van Burgers

Er was strijd tussen verschillende opvattingen en men was klaarblijkelijk op zoek naar het geschikte woord voor de verschuivende status van de wiskunde in de toepassingen. In de Nederlandse wiskunde-literatuur sprak de een net als Ehrenfest van schema of axioma-schema, structuurschema (J.A. Schouten), stelsel of systeem. Een buitenbeentje was Mannoury die schreef "parabool-illusie". D. van Dantzig zou uiteindelijk in de jaren veertig de invloedrijkste verbreider van het wiskundig modelbegrip worden (hoofdstuk 8). De conceptuele ontwikkelingsgang is het zuiverst waar te nemen bij J.M. Burgers (1895-1981).
Paul Ehrenfest werd in 1912 naar Leiden gehaald als opvolger van Lorentz. Het wonderlijke is dat hij met vele mensen die zich het hoofd braken over de geschikte verwoording van de rol van de wiskunde, nauwe contacten had. Burgers en Tinbergen waren leerlingen van hem, net als D.J. Struik trouwens, Schouten had vanuit Delft geregeld contact met Leiden waar hij privaatdocent was en Van Dantzig stond in verbinding de Leidse groep door correspondentie met Einstein en Ehrenfest.

turbulentie

Jan Burgers was dus eigenlijk theoretisch natuurkundige, maar werd op zeer jonge leeftijd, in 1918, benoemd op de nieuwe leerstoel Aero- en Hydrodynamica aan de Technische Hoogeschool in Delft. Op dat gebied specialiseerde hij zich in verschijnselen van turbulentie. Hij toonde zich een ware leerling van Ehrenfest door niet tevreden te zijn met de beschrijving van de ontwikkeling van wervels, hij wilde weten hoe ze ontstonden. Burgers was met andere woorden op zoek naar een absolute theorie van turbulentie-verschijnselen. In een terugblik in 1955 (hij nam afscheid van Delft en zou nog tien jaar lang een research-instituut in de Verenigde Staten opbouwen en leiden):

> "Langs die weg [van ad hoc beschrijvingen] is veel bereikt dat ik met mijn model niet kon: doch wat niet bereikt is, is een om zo te zeggen "absolute theorie", die, uitgaande van de grondgegevens, tot de werkelijke sterkte van de turbulentie met haar verschillende aspecten voert. De theorie van de zg. "isotrope homogene turbulentie" kan laten zien hoe een eenmaal gegeven turbulentie zich ontwikkelt, doch hierbij wordt van een hypothetische formule gebruik gemaakt, die vele vraagstukken openlaat. Ik geloof te mogen zeggen dat ik voor mijn vereenvoudigd model meer principiële dingen kan bereiken."[Burgers 1955]

Burgers' werk toonde de ontwikkeling van het wiskundig modelbegrip in een reeks artikelen vanaf 1939:

[Burgers 1939] 'Mathematical Examples Illustrating Relations Occurring in the Theory of Turbulent Fluid Motion', J.M. Burgers, *Verh. KNAW Eerste Sectie* 17 - 2 (1939), pp.1-53.
[Burgers 1940a] 'Application of a Model System to Illustrate Some Points of the Statistical Theory of Free Turbulence', J.M. Burgers, *Proceedings KNAW* 43 (1940), pp.2-12.
[Burgers 1940b] 'On the Application of Statistical Mechanics to the Theory of Turbulent Fluid Motion. - A Hypothesis Which can Serve as a Basis for a Statistical Treatment of Some Mathematical Model Systems', J.M. Burgers, *Proceedings KNAW* 43 (1940), pp.936-945, pp.1153-1159.
[Burgers 1948] 'A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence', J.M. Burgers, *Advances in Applied Mechanics* 1 (1948), pp.171-199.
[Burgers 1955b] 'A Model for One-Dimensional Compressible Turbulence with Two Sets of Characteristics', J.M. Burgers, *Proceedings KNAW* **B58** (1955), pp.1-18.

Fig. 3. Van voorbeeld tot model bij Burgers

De opeenvolging van titels zegt eigenlijk al genoeg: 'Wiskundige voorbeelden ter illustratie ...'; 'Een model systeem ter illustratie' en '... de behandeling van enige wiskundige modelsystemen'. Later volgen 'Een wiskundig model ter illustratie ...' en in 1955 tenslotte gewoon "een wiskundig model voor...". Burgers was te secuur om de later gangbare uitdrukking "wiskundig model *van*" te gebruiken [Burgers 1955]; [Burgers 1974]. Burgers behoorde met Van Dantzig en Tinbergen tot de eersten die het wiskundig modelbegrip hanteerden.

logicistische reflectie

De relativering van het klassieke toepassen in de eerste helft van de twintigste eeuw ging gepaard met een logicistisch georiënteerde reflectie op de wiskunde en op de verhouding van wiskunde en logica. Kenmerkend voor de praktijk was een pragmatischer inzet van wiskundige formuleringen en een relativering van de waarheidspretentie. De algemene intentie van werkelijkheidsbenadering bleef overeind. In de begeleidende reflectie kwamen diverse noties van model naar voren, maar niet voluit het begrip wiskundig model.
Arturo Rosenblueth en Norbert Wiener (van de cybernetica) overzagen in 1945, in het artikel 'The role of models in science', deze zijde van het geheel. De premisse van tastbaarheid was definitief overwonnen. Zij spraken van theoretisch of formeel model, ook al is het voorbeeld een stelsel wiskundige vergelijkingen.

> "A formal model is a symbolic assertion in logical terms of an idealized relatively simple situation sharing the structural properties of the original factual system."
> "We have shown that scientific knowledge consists of a sequence of abstract models, preferably formal, occasionally material in nature"

7. BASISVAK OF HULPWETENSCHAP: WISKUNDE IN DELFT

De vooropleiding in wiskunde en natuurkunde, de propaedeuse, was *het* kenmerk van hoger technisch onderwijs naar het model van de École Polytechnique. Daar was wiskunde niet zozeer nuttig als wel belangrijk, geen hulpwetenschap maar basisvak. De wis- en natuurkundige propaedeuse was een uiting van de stille ideologie: men bestudeert wiskunde om iets anders te bereiken. De wiskundigen aan de Technische Hogescholen hadden dikwijls de neiging om zich hiernaar te gedragen. Ze stelden zich dan op alsof hun lessen slechts op te voeden hadden tot helder denken en niet in enige relatie tot het verder technisch onderricht hoefden te staan. Daar kwam natuurlijk ruzie van. Maar ernstiger waren de conflicten wanneer wiskundigen de omgekeerde houding innamen en –met het voor toegepaste wiskunde kenmerkende ongeduld– meenden de wijsheid, althans de betere kennis, in pacht te hebben op het domein van de toepassingen zelf.
Gaspard Monge had het concept van een dergelijke propaedeuse bedacht en het meteen ingevuld met onder meer de beschrijvende meetkunde. Jacob de Gelders pogingen vanaf 1813 in Delft om in het militair onderwijs het concept van Monge te volgen smoorden in conflict. Pas bij de instelling van de Koninklijke Akademie (voor burgerlijke ingenieurs) in 1842/43 werd het Franse voorbeeld gevolgd, nog explicieter toen deze instelling in 1866 door een herziening van de onderwijswet overging in de Polytechnische School, welke op haar beurt weer werd vervangen door de Technische Hoogeschool in 1905.

moderne technische wetenschappen

De wiskundigen aan de Technische Hoogeschool opereerden binnen het concept dat van Monge overgeleverd was en voelden geen behoefte om die situatie te wijzigen. Dat gaf moeilijkheden, omdat de toestand in de technische wetenschappen intussen wel ingrijpend veranderd was. Er had zich een moderne, vectorrekening gebruikende, electrotechniek gevormd, een scheepsbouw en werktuigbouw die rekening hield met dynamische verschijnselen, een begin van vliegtuigbouw, een reeks van geavanceerde domeinen in de technische fysica. Het dichtst bij de toegepaste wiskunde bewoog zich de toegepaste mechanica. Omdat op dat domein ook in Delft de meest verwante ontwikkeling zich voordeed, behandelen we hier dat voorbeeld: de onderwereld van Biezeno, de subcultuur binnen de Afdeling Werktuigbouw waarvan ook Burgers, eenmaal in Delft, deel zou uitmaken.

7.a De onderwereld van Biezeno

F.K.Th. van Iterson hield het in 1913 na drie jaar hoogleraarschap in de Toegepaste Wiskunde en Mechanica voor gezien aan de Technische Hoogeschool in Delft en aanvaardde de benoeming tot directeur van de Staatsmijnen. Ergernis over de vergoeding van laboratoriumapparatuur was daaraan voorafgegaan, alsmede een niet verhoord pleidooi om de toegepaste en de theoretische mechanica te verenigen binnen de technische afdelingen. Theoretische (rationele) mechanica was het propaedeutisch domein van de wiskundigen in de afdeling Algemene Wetenschappen. Van Itersons opvolger is datzelfde streven altijd blijven koesteren naar "één harmonisch opgebouwde Technische Mechanica".
Cornelis B. Biezeno (1888-1975) werd op zeer jeugdige leeftijd in 1914 hoogleraar Toegepaste Mechanica, nadat hij een jaar lang met succes Van Itersons colleges had waargenomen. Jan M. Burgers (1895-1981) was nog jonger toen hij hoogleraar Aero- en Hydrodynamica werd in 1918. Beiden bleven hun carrière lang buitenbeentjes in de Delftse afdeling Werktuigbouwkunde, invloedrijke buitenbeentjes. Biezeno trad meer op de voorgrond dan het eenzelvige genie Burgers, maar de laatste nam op onverwachte momenten cruciale organisatorische initiatieven.

gebouwtje

In januari 1913 was de onderwijsbegroting aanleiding tot kamervragen over aerodynamisch onderzoek aan de TH: waarom de minister –toen nog die van Binnenlandse Zaken, Heemskerk– een subsidieverzoek van de Nederlandsche Vereeniging voor Luchtvaart niet had ingewilligd?

> "Men wil een gebouwtje, zooals in Duitsland te Göttingen bestaat en ook in Frankrijk aanwezig is. Zij vraagt nu f 5000 subsidie aan de Regeering. Particulieren zijn dan bereid tot belangrijke financieele hulp. [...] Het subsidie van [het Ministerie van] Oorlog is echter onvoldoende".

Curatoren van de TH hadden de minister geadviseerd dat het geen onderwijsbelang betrof en boorden zo in feite Van Iterson de inrichting van een aerodynamisch laboratorium door de neus. In 1918 werd de zaak wel belangrijk genoeg gevonden. De Rijksstudiedienst voor de Luchtvaart werd ingesteld en aan de TH kwam een leerstoel Aero- en Hydrodynamica. Burgers werd er benoemd, met de toezegging dat hij er een laboratorium mocht inrichten, waarmee hij in 1921 een bescheiden begin maakte.

alphabetletter teveel

Biezeno, 26 jaar oud werktuigkundig ingenieur en geen tijd gehad om te promoveren, had een vliegende start als hoogleraar. Hij schopte wild om zich heen in zijn inaugurale rede. Na een schimpscheut in de richting van gemakzuchtige studenten gebruikte hij een artikel uit het hoogtepunt van de Antimathematische Bewegung in Duitsland, een artikel van P. von Lossow uit 1899, om zijn eigen program tegen af te zetten:

"Zou men nu bij 't aanvaarden van de noodzakelijkheid dier studie [i.e. de wis- en natuurkundige propaedeuse] angst moeten hebben, dat er later een Geistesrevolution hervorgerufen zou moeten worden voor en aleer de door Von Lossow zoo beklaagde slachtoffers bevrijd zouden zijn van den ban der "Unbekannten X", eer zij van dat kwaadaardige, epidemisch geworden mathematische denken gedesinfecteerd zouden wezen, om eerst daardoor weer voldoende geschiktheid te krijgen tot wat in tegenstelling tot wiskundig denken technisch denken pleegt genoemd te worden?" En:

"Zou nu iemand met een alphabetletter teveel in zijne rekening verweten mogen worden, dat hij verkeerd dacht?".[Biezeno 1914]

De manier van denken van ingenieurs en mathematici is echter, volgens Biezeno, geheel dezelfde. Binnen de Toegepaste Mechanica zag hij zelfs geen verschil in gerichtheid tussen beide. Waarop hij zijn gehoor inwijdde in de stand van de theorie in de elasticiteitsleer (problemen van knik, torsie, breuk etc. van materialen) en de graphostatica waarbij zijn eigen werk zou gaan aansluiten.

Aanvankelijk overheersten in Biezeno's werk de grafische (projectief-geometrische) methoden en het grafisch en analoog rekenen. Gaandeweg wonnen de puur analytische methoden en het numeriek rekenen veld. Burgers' werk was van meet af aan meer analytisch van inslag, wat zowel gezien zijn achtergrond in de theoretische fysica als met het oog op zijn werkterrein, de stromingsleer, voor de hand lag.

toegepaste mechanica

Burgers èn Biezeno belichaamden het doordringen van de rationele mechanica in technische vraagstukken, de aanpak van Toegepaste Mechanica. Karakteristiek was de vorming van deeltheorieën, geen ad hoc hypothese maar in de traditie van de rationele mechanica theorieën met waarheidspretentie, en de nadruk op concrete numerieke resultaten. In hun werk en meer nog in beider werkomgeving ontwikkelde zich zeer geavanceerde vaardigheid in het numeriek rekenen.

Zij boekten resultaten en zochten internationale aansluiting bij de toegepaste mechanica in Duitsland, bij het werk van Heun, Runge, Kutta en Von Mises. Persoonlijk contact bouwden ze op met Prandtl in Göttingen en met Von Kármán in Aken. In Berlijn had Von Mises kort na zijn aanstelling een Institut für Angwandte Mathematik opgericht. Vanuit deze basis nam hij het inititatief tot ZAMM en GAMM, het tijdschrift en de vereniging waarin dit vakgebied een condensatiekern vond.

Nu was Duitsland, als gevolg van het verdrag van Versailles, voorwerp van een culturele boycot. In die situatie verschenen de jonge Delftse hoogleraren in 1922 op een door Von Kármán, Prandtl, de Italiaan Levi-Civita en de Zweed Oseen georganiseerde conferentie in Innsbruck. De Nederlandse wetenschappers stonden, vooral dankzij Lorentz, bekend om hun neutraliteit in dezen, hun stellig afwijzen van die boycot. Zíj konden die internationale conferentie wel beleggen waar de toegepaste mechanica rijp voor was. Dat deden Biezeno en Burgers, op aansporing van Von Kármán, en in 1924 kwamen ook de "geallieerden" naar Delft. Het *International Congress for Applied Mechanics* was zo'n succes dat ter plaatse besloten werd het tot instituut te verheffen, met een permanent International

Congress Committee. De organisatoren hadden voorgoed hun naam gevestigd, zij het in een non-existente gemeenschap. De IUTAM, International Union for Theoretical and Applied Mechanics, zou pas in 1946 tot stand komen, met opnieuw Burgers in een hoofdrol. Dat dit zolang op zich liet wachten had weinig met nawerking van de culturele boycot te maken; het was het gevolg van een nog niet uitgekristalliseerd zijn van het vakgebied als zelfstandige discipline. Net als in Delft had ook internationaal de Toegepaste Mechanica voor 1945 trekken van een subcultuur.

wetenschappelijk werkende ingenieurs

De GAMM startte in september 1922 met een dubbele naam: Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung - Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. De betrokkenen onderscheidden zichzelf wel als "wetenschappelijk werkende ingenieurs". Wetenschappelijk wensten Burgers en Biezeno in Delft te werken en met deze opstelling plaatsten ze zich buiten de orde. Er waren op verscheidene plaatsen aan de Technische Hoogschool laboratoria, maar systematisch fundamenteel onderzoek was geen gewone activiteit. Hoezeer Biezeno en Burgers ook internationaal vooraanstaande wetenschappers waren, hoeveel contacten ze met het industriële onderzoek hadden, hoe invloedrijk hun lessen waren, ze hadden geen eigen studenten. De toegepaste mechanica en de stromingsleer golden als theoretische vakken binnen de Afdeling Werktuigbouwkunde en daarin konden de ingenieurs niet afstuderen –een situatie die pas in 1948 zou wijzigen door een herschikking binnen de Afdeling. Het was, met andere woorden, de Afdeling zelf die deze hoogleraren afhield van het normale resultaat van een opleidingsinstelling, leerlingen, en hun onderzoeksgroepen bepaalde tot een subcultuur.
Op het niveau van de afdeling, de Afdeling Werktuigbouwkunde en Scheepsbouwkunde, vormde zich zo een subcultuur, *de onderwereld van Biezeno*. Men bereikte die wereld door te vragen naar het wiskundig geraamte onder de werkelijkheid van de ingenieur.

subcultuur met eigen agenda

Het was een kleine coherente groep met een eigen agenda, die afweek van de doelen van de afdeling en van de TH als geheel, met een eigen stijl van werken en met een eigen beeld van haar nut voor de buitenwereld. Kern was de groep van Biezeno zelf, de lector naast hem, het laboratorium met een groeiend aantal assistenten en stagiaires. Hierdoor en door promoties, tot 1945 vier en daarna nog vier, had hij toch leerlingen. Biezeno's colleges, verder, moeten indrukwekkend geweest zijn. In de directe omgeving en meebepalend voor de subcultuur was er Burgers met diens laboratorium. Dan waren er beider werkcontacten met de spoorwegen, met het scheepsbouwkundig proefstation, met de Staatsmijnen en met de Rijksstudiedienst voor de Luchtvaart (vanaf 1937 NLL, nu NLR). Zij hadden daar leerlingen of verwierven die juist. Omgekeerd memoreert Burgers hoe hij meteen na zijn aanstelling in 1918 een uitgebreide brief kreeg van de directeur van de Staatsmijnen, Biezeno's voorganger Van Iterson, met een lijst van problemen; hoe Wolff, Koning en Von Baumhauer al in de jaren twintig binnen de RSL een aanzet deden tot theoretisch aerodynamisch onderzoek.

onverschrokken rekenwerk

Op de agenda stond het wetenschappelijk bedrijven van ingenieurswetenschap, wetenschappelijk door het verdere exploiteren van de rijke bron van rationele mechanica. Biezeno wilde met verderreikend wetenschappelijk inzicht zijn vak dienstbaar maken aan de samenleving. Een rekenende detaillering van deze benadering moest leiden tot concrete technische resultaten. De agenda van de onderwereld van Biezeno was met andere woorden dezelfde als de taak die Von Mises in die tijd formuleerde voor de Angewandte Mathematik. De stijl werd enerzijds gekenmerkt door streven naar theorievorming, gekoppeld, zoals boven aangegeven, aan pragmatisme bij het aanvallen van concrete problemen, anderzijds door onverschrokkenheid ten aanzien van rekenwerk. De onverschrokkenheid was geboren uit de zekerheid op het goede spoor, namelijk op de weg naar de waarheid, te zitten. Bij A. van Wijngaarden werd die stijl bijzonder manifest. Hij werkte in de oorlogsjaren aan een proefschrift bij Burgers, rekende telkens wekenlang achtereen en vond het resultaat niet mooi. Het schoonheidsideaal was inzicht naar het voorbeeld van de rationele mechanica. Hij was intussen assistent bij Biezeno en promoveerde tenslotte bij deze, het ideaal terzijde stellend, op een vertoon van rekentechnisch kunnen, met lof.

Biezeno onderwees weliswaar grafische en numerieke methoden, in zijn omgeving gold een veel sterker adagium. Daar gold de vanzelfsprekendheid dat men zich de voor een probleem benodigde rekentechnieken eigen maakte, en er niet voor terugschrok de technieken desnoods zelf te ontwikkelen. Deze vanzelfsprekendheid was wellicht het meest onderscheidende kenmerk van de "onderwereld van Biezeno".

7.b Zeggenschap over de propaedeuse

De Afdeling A, Algemene Wetenschappen, droeg sedert de oprichting van de Technische Hoogeschool in 1905 de verantwoordelijkheid voor de propaedeutische examens. Deze regeling plaatste de wiskundigen in een machtspositie, waar ze niet altijd even gelukkig mee waren, en die ze niet altijd even goed wisten te hanteren. De wiskundigen vormden met de natuurkundigen, de jurist en de econoom de Afdeling A.

praktijkgerichtheid

De vakafdelingen kenden het kandidaats- en ingenieursdiploma toe. De eis van een stage, in 1923 toegevoegd aan het examenreglement, stond symbool voor het dogma van praktijkgerichtheid:

> "Het ingenieursdiploma wordt slechts uitgereikt aan hen, die bewijzen hebben overgelegd van voldoende practische werkzaamheid".

Die schijnbaar terloopse toevoeging kenschetste de niet direct wiskunde-vriendelijke achtergrond van het jaren aanhoudende gerommel over vakkenpakket, tijdstip en opsplitsing van het propaedeutisch examen. Vrees voor te lange studieduur, die de TH tot een ondoelmatig instituut zou bestempelen, leverde meer dan eens het hefboom-argument om de discussie open te breken. Dit argument bracht begin jaren twintig de Afdeling A in een positie dat ze niet anders kon dan meer starre regels te hanteren, namelijk eens per jaar examen over alle onderdelen. Studentenrumoer en een bittere nederlaag voor de Afdeling waren het gevolg. In 1924 werd het wiskundeprogramma met een kwart verminderd, de examenregeling werd veel flexibeler en voor het eerst kwamen er vrijstelling verlenende tentamens. De wiskunde-vakken waren het mikpunt van de kritiek, de natuurkunde nauwelijks. De fysici volgden ongestoord hun eigen agenda en verwierven, na een eerste aanzet in 1922, in 1928 tegen de scepsis van de Delftse vakafdelingen in hun eigen opleiding in de Technische Natuurkunde.

opheffing

Toen in 1930 de natuurkundigen een eigen sub-afdeling, binnen de Afdeling A, vormden en de beschikking kregen over een Laboratorium voor Technische Physica, toen gingen er stemmen op om de Afdeling dan maar op te heffen. De wiskundigen hadden geen verweer meer en de Senaat stemde er mee in. Pas het College van Curatoren reageerde alert: wie moest dan de verantwoordelijkheid dragen voor de propaedeutische examens? In de volgende senaatszitting werd de zaak teruggedraaid, maar toch: de wiskundigen hadden met zich laten sollen. Tot het einde van de jaren veertig zou het thema van opheffing van de afdeling in meer en in minder bedekte vorm terugkeren. Nog in de jaren zestig moest de pas opgerichte Technische Hogeschool Twente het aanvankelijk zonder afdeling wiskunde doen.

meer dan basisvak

De vakafdelingen wilden in de jaren dertig, gedreven door de ontwikkeling van hun eigen wetenschapsgebieden, meer dan een opvoedende en selecterende propaedeuse. Zij wilden toepasbare wiskunde voor hun studenten. Daarbij meenden de hoogleraren in de technische wetenschappen beter te weten dan de wiskundigen wat toepassen was. En dat was ook zo; er waren duidelijke voorbeelden in de technische mechanica en de electrotechniek. Zodra de wiskundigen aan de wensen van de vakafdelingen tegemoet zouden hebben willen komen, moesten ze dus vrezen voor hun autonomie en bovendien voor hun zeggingskracht. In de jaren twintig en dertig scheen niemand van zins of bij machte enige beweging in deze patstelling te brengen, ook J.A. Schouten niet, de enige met een reputatie –op grond van zijn werk in de differentiaalmeetkunde– die hem ook buiten de Afdeling A bescherming bood.

"misverstand"

Eind jaren dertig laaide het publieke debat over de rol van de wiskunde in het technisch hoger onderwijs weer op. Schouten en zijn vroegere assistent, inmiddels collega D. van Dantzig kozen behoedzaam positie. De afdelingen Elektrotechniek en Werktuig- en Scheepsbouwkunde en de subafdeling Natuurkunde oefenden in dringende doch beleefde nota's aandrang uit op de wiskundigen om de collegestof en het aantal uren in te perken èn de leerstof te actualiseren. Met name de Beschrijvende Meetkunde en daarbij horende vermaledijde tekenoefeningen in projectiemethoden moesten maar eens geschrapt worden, was de boodschap.
Een openlijke aanvaring dreigde in 1939 toen Landberg, hoogleraar werkplaatstechniek in de Afdeling Werktuig- en Scheepsbouwkunde, en zijn collega W.F. Brandsma oefeningen en een tentamen belegden op het tijdstip van de tekenoefeningen. De kwestie werd bijgelegd, "misverstand", maar de reactie van de wiskundigen in hun verdediging van dit erfstuk van Monge was afwerend en strikt formeel.
De groep van Delftse wiskundigen onderhield niet slechts de propaedeutische functie, ze belichaamde de stille ideologie. Ze wilde de aanstaande ingenieurs ruimtelijk inzicht bijbrengen en vertrouwd maken met de wetenschappelijke, in casu wiskundige, denkwijze. Inmiddels was de beschrijvende meetkunde van symbool tot relikwie geworden. Het tekenen in de zin waarin Monge dat gepropageerd had, was inderdaad al lang gemeengoed geworden en werd door de werktuigbouwers zelf onderwezen; vandaar het conflict met Landberg. Toepasbaarheid, technische relevantie, claimden de wiskundigen niet, maar ook de vormende waarde was hiermee pijnlijk achterhaald. Toegepaste wiskunde en aanzetten tot wiskundig modelleren, zo afwezig in de vooroorlogse Nederlandse wiskundebeoefening, kwamen wel tot ontplooiing in Delft, in de vakafdelingen. Zo kwam de ook propaedeutische functie van de wiskunde in de lucht te hangen. De wiskundigen werden geconfronteerd met een appèl op ondersteuning van de kant van collega's die in feite beter geïnformeerd waren. De mensen aan de wiskundige kant van de vakafdelingen stonden tegenover de wiskundigen in de afdeling A, die eigenlijk hun bondgenoten hadden moeten zijn. De botsing van wiskunde als hulpwetenschap en wiskunde als basisvak leidde tot een impasse.

In december 1939, toen de natuurkundigen zich onder de critici schaarden, kwam er beweging. Op uitdrukkelijk verzoek van de subafdeling Natuurkunde vormde de Afdeling A een commissie - onder voorzitterschap van J.A. Schouten - om na te gaan hoe de propaedeutische examens zo gereorganiseerd zouden kunnen worden "dat een grondige scholing in de exacte vakken, voor zover deze voor den ingenieur noodzakelijk is, verkregen kan worden". Merk op hoe met de woorden "grondig" en "noodzakelijk" het spanningsveld tussen basisvak en hulpwetenschap zelfs in de opdracht van deze commissie weer is ingebakken.

een dynamische lijn

De actie van de natuurkundigen was ingegeven door de beantwoording van een schrijven van de Afdeling Elektrotechniek over de propaedeuse, over beschrijvende meetkunde in het bijzonder. De fysici forceerden met succes een meer dan alleen defensieve reactie bij de wiskundigen en op 1 mei 1940 volgde een gemeenschappelijke vergadering van de Afdeling A met de Afdeling Elektrotechniek.

> "Allereerst moet de beschrijvende meetkunde daarbij op haar juiste waarde worden geschat, daarmede moet voortgang worden gemaakt".

H.S. Hallo, voorzitter van de afdeling E, legde meteen het mes op tafel. Nu konden zijn collega's zich iets milder uiten. G.J. Elias en H.G. Nolen bepleitten een algemene reorganisatie van de propaedeuse terwille van een zo groot mogelijk nuttig effect van het wiskunde-onderwijs, nuttig in het licht van latere studie en praktijk.

> Nolen: "...de docenten van de vakafdeeling. Die willen immers juist propagandisten der wiskunde zijn, doch dan moet het ook levend wiskunde onderricht zijn en geen ballast".
>
> Elias: "Doch de basis van het onderwijs in de wiskunde is nog steeds die van voor vele jaren".

Niet de saaiheid en ouderwetsheid van de beschrijvende meetkunde, de propaedeutische functie als zodanig van de wiskunde was Nolens mikpunt:

> "In de techniek zijn telkens weer nieuwe onderdeelen van de wiskunde noodig. *Zoo moet de wiskunde dus als een technisch vak behandeld worden*: nieuwe onderdeelen moeten worden ingevoerd, oude moeten verdwijnen".

Wiskunde een technisch vak, zo profetisch bedoelde Nolen het niet, maar de toevoeging van W.T. Bähler liet onmiskenbaar uitkomen dat de elektrotechnici wel degelijk het dieper liggende thema, de stille ideologie van de Verlichting, ter discussie stelden:

> "In de techniek is er *een dynamische lijn*, juist bij de wiskunde-toepassing. Daardoor heeft de wiskunde thans veel meer dan alleen vormende waarde. .... Meetkunde blijft noodig, maar het onderdeel beschrijvende meetkunde is vroeger sterk overschat - wat niet ernstig was, daar de wiskunde toch bijna niet werd toegepast. Op een gegeven moment was het zeer verrassend, dat wiskunde bleek werkelijk bruikbaar te zijn".

De elektro-technici vroegen dus niet meer om een opwaardering van de basisvakfunctie, de stille ideologie, maar om een herwaardering van de wiskunde als hulpwetenschap. Door dit nu een technisch vak te noemen, zinspeelden ze in feite

op een verzelfstandiging van de hulpwetenschap en in die zin was de uitspraak van Nolen wel degelijk profetisch.
De commissie Schouten had de ontmoeting degelijk voorbereid, maar het verweer bleef bleekjes. De hier begonnen confrontatie zou zeker consequenties hebben gehad als de bezetting het vervolg niet verduisterd had. Van Dantzig werd op non-actief gesteld en ontslagen op last van de bezetters, en na enkele weigeringen door andere kandidaten opgevolgd door O. Bottema. Schouten stortte in en trok zich terug uit Delft. De beschrijvende meetkunde bleef gehandhaafd totdat in de naoorlogse jaren de ene vakafdeling na de andere dit college eigenmachtig afschafte. De boot die de hoogleraren in de wiskunde op dit concrete strijdpunt misten, bleek achteraf de laatste te zijn geweest. Op 18 juni 1942 ontnamen Rector Magnificus en Assessoren de afdeling der Algemene Wetenschappen de zeggenschap over de propaedeuse. De vakafdelingen stelden de examens en de uitslagen vast, de wiskundigen mochten nog slechts hun handtekening zetten.

instructeurs

Zo zat de wiskunde in Delft volledig aan de grond, leek het. Na de oorlog, echter, bleek ze herboren. Bottema had zich ontpopt als de dragende figuur, sinds 1942 als voorzitter van de "vergadering van hoogleraren in de wiskunde", in de functie van "regelaar van de propaedeutische examens" en als secretaris van de Afdeling A. Onder zijn aanvoering werd met nieuw elan de traditionele propaedeutische functie van de wiskunde uitgedragen. De triomf op dit gebied was de aanstelling van instructeurs voor de oefeningen bij de propaedeutische colleges; voor het eerst in 1947. Al in de oorlog was het idee van instructeurs geopperd in verband met de "overbevolking": men wilde de grote aantallen ingeschreven studenten in 1940, '41 en '42 verwerken met intensievere begeleiding, selectie en een beperking van de inschrijvingsduur. Na de oorlog omarmden de wiskundigen het idee en wisten het te realiseren. Onder aanvoering van Bottema wisten de wiskundigen de kwestie van onderwijsrendement nu eens in hun voordeel in te zetten.
Men wist in korte tijd een aantal uitgesproken talenten, N.G. de Bruijn, in 1946 opvolger van Van Dantzig, J. de Groot in 1948, A.C. Zaanen in 1950, J. Korevaar in 1951, aan zich te binden. Op aandringen van Bottema belegden de hoogleraren een wekelijks "gezellig samenzijn" en kwam er briefpapier met opdruk "Mathematisch Instituut van de Technische Hogeschool". De Bruijn nam het initiatief tot een wekelijks colloquium. Nieuwe colleges werden gegeven, 'Voortgezette Analyse' door Bremekamp, 'Functietheorie' door Van Os, 'Toegepaste Analyse' door S.C. van Veen. Van Veen zette in samenwerking met Goudriaan een college 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek' op. De Bruijn ontplooide zich tot een wiskundige omnivoor met aanzetten tot onderzoek naar rekenmachines –Van der Poel werd zijn speurwerkassistent in een Hogeschoolfondsproject. Wiskunde in Delft was plotseling weer een bloeiend en zelfbewust bedrijf:

> "Tenslotte bespreekt Bottema de vraag over de mogelijkheid om in de toekomst in Delft te promoveren in de wiskunde. Wij zijn te bescheiden in die dingen. Bottema is er sterk voor. Meerdere der aanwezigen zullen nog meer met dit denkbeeld vertrouwd moeten raken. Dan zullen ze er wellicht ook enthousiast voor worden."

7.c Mathematisch Ingenieur

Van Dantzig keerde na de bevrijding nog korte tijd terug naar Delft, maar zijn gedachtenvorming over maatschappelijke dienstbaarheid van de wiskunde was zoveel verder gegaan en hij had zich van de Delftse cultuur zo vervreemd, dat het niet meer boterde met zijn Delftse collega's. Toch kwam er een vervolg op de commissie Schouten van 1940, met Van Dantzig. Op 14 september 1945 stelde de Afdeling A een commissie Herziening Wiskunde-Onderwijs in, Bremekamp, Bottema en Van Dantzig, die "de zaak in de boezem van de sub-afdeling wiskunde zal voorbereiden". In het voorjaar van 1946 werd het verslag in de onderafdelingsvergadering besproken en vastgesteld. Daar bleef het bij tot een interventie van president curator Holst de wiskundigen verder in beweging bracht. Holst wees erop dat "nergens in den lande zoveel wiskundigen en fysici verenigd waren als in Delft. Uit dien hoofde zou Delft zelfs de aangewezen plaats kunnen zijn voor een speciale wiskundige opleiding". Een jaar later kwam er een nieuwe commissie Bremekamp, nu met S.C. van Veen en De Bruijn met de offensievere opdracht om de wenselijkheid en de mogelijkheid te onderzoeken van het instellen van een opleiding tot *mathematisch ingenieur*.
Deze laatste commissie ging zorgvuldig en weinig offensief te werk. Ze informeerde bij alle afdelingen of die iets voelden voor het toestaan van een mathematische afstudeerrichting en het instellen van een diploma Mathematisch Ingenieur. Een idee van de tendens was er, een concept van wat het opleidingsprogramma zou moeten worden nauwelijks.

bedrijfsingenieur en researchingenieur

Op zichzelf was het klimaat voor nieuwe initiatieven gunstig, temeer daar in het kader van reorganisatie-inspanningen alle studieprogramma's in revisie waren. Overbelasting van de programma's moest opgeheven worden om de student meer ruimte te laten voor algemene vorming[4]. Belangrijker motief was de verantwoordelijkheid die de TH voelde het technisch kader te leveren voor de verwachte voortschrijding van industrialisatie: meer, beter op de praktijk voorbereide ingenieurs. Kortere studieduur werd afgewezen, maar een onderscheid tussen en afstudeerrichting voor *bedrijfsingenieur* en een voor *researchingenieur* werd binnen alle studierichtingen ontwikkeld. De hervorming werd in 1948 doorgevoerd, ze zou in de loop van de jaren vijftig weer verdwijnen onder weer nieuwe plannen. Biezeno profiteerde van de reorganisatiegolf en wist eindelijk het afstuderen bij zijn groep op een theoretisch onderwerp geaccepteerd te krijgen.

---

[4] In de jaren vijftig zouden Bildungsaspecten van het TH-onderwijs veel meer nadruk krijgen. Intensiever onderwijs, onderzoek naar studierendement en oorzaken van uitval, studentenhuisvesting, studiebegeleiding, toelating van buitengewone leerstoelen in de wijsbegeerte, structurele aandacht voor "niet-technische vakken", Studium Generale; al zulke vernieuwingen kregen gestalte onder het rectoraat van Bottema (1951 tot 1959).

Zo had de commissie Bremekamp logisch redenerend drie opties te overwegen:

1e Mathematisch ingenieur –een diploma uit te reiken door de Afdeling A.

2e mathematisch afstuderend research-ingenieur

3e mathematisch afstuderend bedrijfsingenieur

Voor de eerste mogelijkheid achtte men de tijd niet rijp, het gegokte aantal van vijf studenten per jaar te gering. Inhoudelijk zou het verschil met (2e) de mathematisch afstuderende research-ingenieur naar verwachting zo klein zijn, dat langs die weg wel voorzien kon worden in de in Nederland gesignaleerde behoefte. Men mikte vooreerst op de tweede optie en raadpleegde op dit punt nog eens formeel de afdelingen, "*Hoewel de wiskundigen de gedachte aan een afzonderlijk diploma niet prijsgeven*".

8. WISKUNDIG MODELLEREN

Wiskundig modelleren en industriële wiskunde waren geen specifiek Nederlandse ideeën en activiteiten. De internationale vergelijking laat zien dat vele technische hogescholen een opleiding in die richting ontwikkelden en dat het van de locale machtsverhoudingen afhing of deze opleiding in handen van de werktuig- en vliegtuigbouwers kwam, of van de wiskundigen, Biezeno of Timman. De vroegste afstudeermogelijkheid in wiskunde aan TH's kwam tot stand in Duitsland. De Technische Hochschulen verzorgden er al een lerarenopleiding voor de wiskunde. In 1942, bij de afkondiging van een nieuw examenreglement, ontstond de mogelijkheid *Diplommathematiker* te worden. De wiskundigen mikten op het opleiden van Industriemathematiker. Een deelnemer aan de discussie in de Mathematische Reichsverband in 1938 verwoordde de doelstelling aldus:

> "Forschung und Industrie verlangen "ganze Kerle" ..., sie müssen als Mathematiker Ingenieure und als Ingenieure Mathematiker sein"

Het slot van Timmans inaugurale rede, in Delft 1952, zei hetzelfde in iets minder ronkende woorden:

> "Ik heb de indruk, dat een ruime toevloed van wiskundigen met een inzicht in de techniek of van ingenieurs met een goede kennis van wiskundige methoden op vele plaatsen met vreugde begroet zou worden"

seculier

Het idee van toegepaste wiskunde stond na anderhalve eeuw op de tocht. Wiskundigen werden zich steeds scherper bewust, dat de toepasbaarheid niet gekoppeld was aan een speciaal onderdeel van het vak. Ze zochten naar een meer passende terminologie:

> "Het is onmogelijk onderscheid te maken tussen "zuivere" en "toegepaste" wiskunde op grond van de bestudeerde onderwerpen; dat zou maar onzin opleveren. Toegepaste wiskunde is een kwestie van motivatie, van houding en niet van aanleg. De alternatieve suggestie van een onderscheid tussen "kloosterwiskunde" en "seculiere" wiskunde laat de uiteindelijke eenheid van de wiskunde goed uitkomen"[Proceedings 1954: p.6]

Aldus de aanhef van de AMS-NRC *Conference on Training in Applied Mathematics* in 1953. 'Toepassingsgerichte wiskunde', dat was de meest algemene term die de discussie in de jaren vijftig opleverde. Gerichtheid, houding of mentaliteit werd het belangrijkste kenmerk geacht. Toch had dezelfde conferentie een veel specifieker resultaat, doordat John Tukey, een van de deelnemers, erop terugkwam. Achteraf, in een bijlage bij het discussieverslag in de proceedings, kwam hij naar voren met het idee van 'mathematical engineer'. In de *American Mathematical Monthly* van 1955 herhaalde hij zijn pleidooi: 'Mathematical consultants, computational mathematics and mathematical engineering'. Tukey stelde voor om zo mogelijk de Afdelingen Toegepaste Wiskunde achter zich te laten en, ook als de naamgeving niet zo snel te wijzigen was, inhoudelijk over te gaan op mathematical engineering:

> "Als er een toegepaste wiskunde denkbaar is (en bestaat) van spel, van genetica en van mechanica, waarom zouden we dan geen toegepaste wiskunde van de toepassingen van wiskunde kunnen ontplooien?" [Tukey 1955]

probleemformulering naast rekenwerk

Een afdeling wiskunde en een afdeling mathematical engineering zouden in Tukey's ogen naast elkaar moeten bestaan en ieder hun eigen opleiding verzorgen. Impliciet gaf hij hier aan, dat men wiskunde als basisvak en wiskunde als (verzelfstandigde) hulpwetenschap maar beter uit elkaar kon houden. Mathematical engineering definieerde hij tamelijk conservatief als: "those branches of engineering where the single most important tool is mathematics". Op het punt van ontbottende numerieke wiskunde, mathematics of computation, zag hij beter dan zijn collega's elders dat dit een zaak voor de wiskundigen zou zijn ter ondersteuning van een geheel nieuwe functie, die hij *computation engineering* noemde en waar hij emplooi zag voor mathematical engineers. Systematische aandacht voor probleem*formulering* daarentegen, was volgens Tukey nog een taak voor de verdere toekomst, terwijl onder meer in Nederland al volop nagedacht werd over het wiskundig modelleren en de opleiding daartoe. David van Dantzig in het bijzonder, die voor de Tweede Wereldoorlog onder de Delftse basisvakdocenten een marginale positie had ingenomen, gaf in 1945 de toon aan in het denken over modelleren, consultatie en toepassingsgerichte opleidingen. Reinier Timman, op zijn beurt, zou mathematical engineering voor Nederland gestalte geven in een opleidingsplan eer Tukey het idee goed en wel had geformuleerd.

8.a Modelleren als activiteit

Het concept van wiskundig model loste dat van toegepaste wiskunde af. Grote ideeën hebben een lange incubatietijd. De ontplooiing van het wiskundig modelbegrip vergde vanaf de herkenbare aanzet bij Hertz twintig jaar, beschouwd naar het voorkomen van de woordcombinatie bij Borel en Jourdain; een halve eeuw wanneer men kijkt naar de eerste receptie van het concept bij Burgers en Tinbergen.
Een volgende stap was het beschouwen van wiskundig modelleren als *activiteit*. David van Dantzig was degene die op dit punt de doorbraak maakte. Het modelleren werd een vorm van wiskunde-beoefening. Pas als manier van doen, als procedure, kon het wiskundig modelleren de verbreiding en invloed krijgen, die hoort bij een dermate ingijpende verandering.

Van Dantzig

David van Dantzig (1900-1959) maakte na zijn studie wiskunde in Amsterdam carrière in Delft, van assistent bij J.A. Schouten in 1927 tot collega-hoogleraar in 1940. Hij was in de Delftse wiskunde-groep nog steeds veruit de jongste tijdens de discussies met de vakafdelingen eind jaren dertig. Hij had uitgespoken meningen en weinig gehoor. Hij zag emplooi voor een rekendienst en voor statistische diensverlening. Noch de inhoudelijke kracht van zijn visie, noch de welwillende steun van Schouten was voldoende om invloed uit te oefenen op de impasse waarin de discussie over de rol van de wiskunde in het technisch hoger onderwijs toen verkeerde.

Mathematisch Centrum

Van Dantzig was topoloog en mathematisch fysicus, maar bovenal grondslagenman: zijn ideeën over de maatschappelijke rol van de wiskunde waren vooral ingegeven door de leer van de significa van Mannoury, een mengeling van semiotiek, filosofie en psychologie van de wiskunde. De Signifische Kring was de Nederlandse tegenhanger van de Wiener Kreis. Eind jaren dertig begon Van Dantzig zich te verdiepen in grondslagen van de waarschijnlijkheidsrekening en tegelijk voorbeelden te verzamelen van feitelijk gebruik van mathematische statistiek. Het was in dit verband dat hij voor het eerst het woord model bezigde. Typerend voor hem was dat hij er meteen over publiceerde, en wel over de grondslagen van de statistiek, eerst in het Nederlands en vervolgens in het Italiaans. Toen Van Dantzig was ontslagen en in Amsterdam de oorlog overleefde, bezorgde het statistische werk hem enige inkomsten. In 1945 was David van Dantzig degeen die het idee had de wiskunde op nieuwe wijze maatschappelijk dienstbaar te maken in een instituut waar systematisch onderzoek zou worden gedaan, *zuiver en toepassingsgericht*, in dienst van de cultuur en van de welvaart: het Mathematisch Centrum, opgericht op 11 februari 1946. Vanuit dit Centrum werden cursussen gegeven. Belangrijker was het onderzoek dat er werd gedaan. Het bestaat nu nog als CWI, Centrum voor Wiskunde en Informatica. Het

wiskundig modelleren werd er van meet af aan beoefend in de statistische consultatie en impliciet in het rekenwerk.
Na de oorlog doceerde Van Dantzig nog korte tijd in Delft. Hij gaf er op eigen initiatief een cursus 'Wiskunde, logica en ervaringswetenschappen' en dat was de eerste openbare behandeling van het begrip "wiskundig model". Wat hij met wiskundig modelleren voorhad, werd wel duidelijk in een volgende publicatie: 'General procedures of empirical science' (1947). Het schema (Fig. 4) daaruit maakt duidelijk hoezeer het Van Dantzig ging om het wiskundig modelleren als activiteit. In verband met de gang van werkelijkheid naar wiskunde en terug, spreekt Van Dantzig van in- en uitschakelen van het formalisme. Deze general procedures stonden dus voor de algemene wetenschappelijke werkwijze (dit plaatst Van Dantzig qua algemeenheidsaanspraak op gelijke hoogte met Wiener). Het omgekeerde komt men ook dikwijls tegen: waar gesproken wordt van scientific method, de wetenschappelijke methode, is bij nader inzien meestal het wiskundig modelleren of een impliciete vorm daarvan bedoeld.

Fig 4. Schema van werkelijkheid naar wiskunde en terug; uit: D. van Dantzig 'General procedures of empirical science' (1947)

1.	Experience	Forgetting
2.	Recollection	Simplification
3.	Observation	Ellipsis
4.	Description	Regularisation
5.	Model	Switching on
6.	Formalisation	Absolutising
7.	Induction	Arranging
8.	Axiomatising	Deduction
9.	Extension	Switching off
10.	Interpretation	Inductive behaviour
11.	Expectation	Volition
12.	Action	

mathematische statistiek

Van Dantzig werd kort daarop in Amsterdam benoemd om mathematische statistiek te doceren. Hij gaf leiding aan de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum waar een stroom van statistische consultaties werden verricht. Als hoolgeraar was hij de leermeester van een volgende generatie academische statistici. Door cursussen en consultaties en via de VVS, Vereniging voor Statistiek, had hij grote invloed op de industriële statistici, die hun rol speelden in de wederopbouw en de rationalisatie in de industrie.
In dat hele gebied van academische en industriële statistiek, inclusief het voor Nederland late begin van Operations Research (door Van Dantzig "besliskunde" gedoopt), was Van Dantzig de verbreider van het wiskundig modelleren. Hij gaf er bovendien zijn draai aan mee van zorgvuldige en uitgebreide procedure.

Timman

In het domein van de fysisch-technische toepassingen van wiskunde vervulde Reinier Timman (1917-1975) de rol van verbreider van wiskundig modelleren. Weliswaar had Burgers hier het concept aangeleverd, Timman citeert hem dankbaar, maar het was Timman die de impuls gaf aan het gebruik van het begrip, met name via de wiskundig ingenieursopleiding natuurlijk. Die taakverdeling had wel tot gevolg dat Timman veel minder dan Van Dantzig in zijn geschriften inging op het begrip en de werkwijze van het modelleren.

fluttersectie

Reinier Timman had wiskunde gestudeerd in Amsterdam en vond werk in het vliegtuigbouwkundig onderzoek, eerst bij Fokker van 1939 tot 1945 en later bij het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, NLL (nu NLR), in de fluttersectie. Draagvlaktheorie was zijn specialiteit. Bekijkt men de rapporten van het NLL uit die tijd dan is de vaste structuur opvallend: inleiding en probleemstelling, wiskundige behandeling en dan conclusies gevolgd door een appendix met rekenwerk en andere overmaat aan wiskunde. De tweede paragraaf nu, van dergelijke rapporten, begon tot rond 1950 met "de theorie" als opschrift voor een twee of drietal vergelijkingen waar dan verder mee gewerkt werd in een uitgebreide afweging van de houdbaarheid en bruikbaarheid van deze weergave van de problemen en ampele bespreking van de reikwijdte van geldigheid van de conclusies. Die rapporten waren dus excercities in het modelleren, wiskundig modelleren, en het hoeft dan ook niet te verbazen dat in de loop van de jaren vijftig dat opschrift "de theorie" geleidelijk vervangen werd door "het model". Hierin moet men niet de invloed van Timman zien, het was veeleer de cultuur waarbinnen hij zich ontwikkelde tot vooraanstaand onderzoeker en waarvan hij een aantal kenmerken meenam naar Delft, toen hij daar benoemd werd in 1952.

de structuur van het ITW als typering van wiskundig ingenieurswerk

Wat voor Timman wiskundig modelleren en wiskundig ingenieurswerk was, viel dus nauwelijks expliciet te lezen in zijn werk. Het liet zich beter indirect aflezen uit zijn bestuurlijke en wetenschappelijke activiteit. Nergens zo duidelijk als in de '*Nota* over de inrichting van een Instituut voor toegepaste wiskunde aan de

Technische Hogeschool' zette Timman uiteen wat volgens hem de functie van wiskunde was en wat hij voor had met de opleiding van Wiskundig Ingenieurs. De nota:

> "De problemen, die zich bij het onderzoek aan de Technische Hogeschool voordoen, zijn in de eerste plaats technische problemen, waarop een antwoord verkregen moet worden in een voor de techniek bruikbare vorm. De bewerking van een dergelijk probleem doorloopt vier fasen
>
> 1) formulering van het technische probleem als een mathematisch probleem
> 2) wiskundige uitwerking van dit probleem
> 3) numerieke uitwerking van dit probleem
> 4) interpretatie van de resultaten
>
> De eerste fase zal moeten geschieden door een "toegepast wiskundige" in samenwerking met de technicus. De eerste zal dus zowel een inzicht moeten hebben in de technische kant van het vraagstuk als in de wiskundige methoden, die dienstbaar gemaakt kunnen worden. Door deze samenwerking moet een *technisch zinvolle* formulering gevonden worden, die tot een mathematisch mogelijke oplossing voert.
>
> De tweede fase is een wiskundige opgave, n.l. het mathematische probleem op te lossen en geschikt te maken voor numerieke uitwerking. Hier is dus een bewerker vereist, die een grondige kennis bezit van mathematische en numerieke methoden.
>
> In de derde fase is een rekenbureau nodig, waar de numerieke bewerkingen uitgevoerd worden. Een resultaat is n.l. alleen dan technisch bruikbaar als het in de vorm van numerieke gegevens ter beschikking komt.
>
> De vierde fase zal weer door dezelfde personen als de eerste behandeld moeten worden".

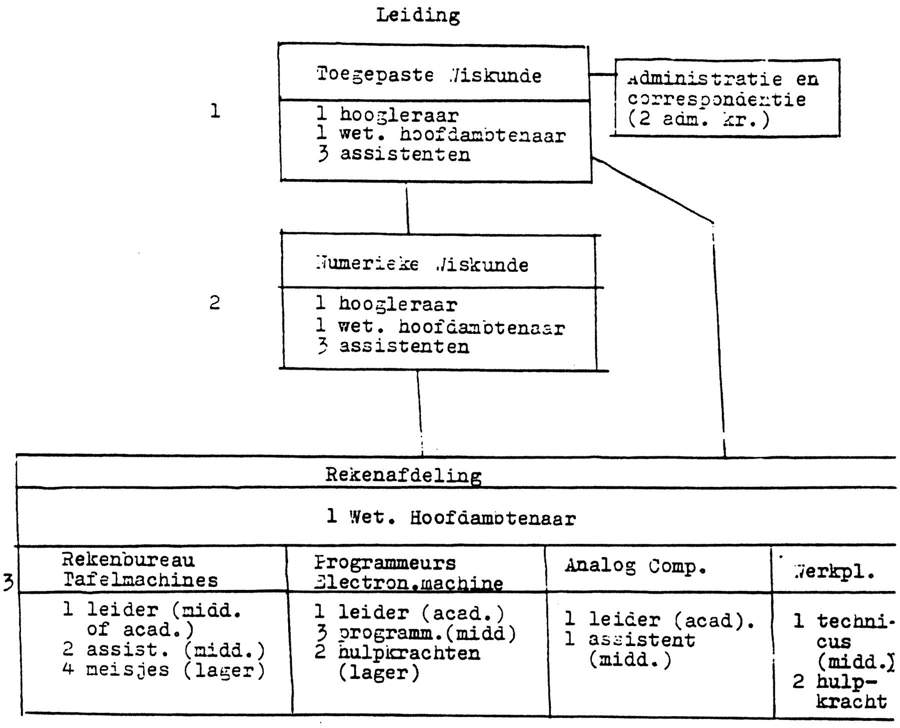
De "toegepast wiskundige" was ook het type dat hij op wilde leiden, en niet zozeer de numericus.

De vier fasen leidden eenvoudig tot een instituut met drie afdelingen waartussen een duidelijke hiërarchie bestond: 1. Toegepaste wiskunde; 2. Numerieke wiskunde; 3. Rekenafdeling.

> "In de eerste afdeling, die naar buiten en naar binnen optreedt en waar de leiding moet berusten, zijn de "toegepast wiskundigen" vertegenwoordigd. ... De tweede afdeling is het arbeidsveld van wiskundigen, die goed thuis zijn in mathematische en numerieke methoden. Hier is de invloed van physica en techniek veel geringer; een "zuiver" mathematicus met belangstelling voor numerieke methoden zal hier en vruchtbare werkkring vinden.... De derde afdeling is meer uitvoerend en organisatorisch, ..."

Kenmerkend voor de status van het werk was verder dat de eerste en tweede afdeling onder een hoogleraar zouden staan, de derde onder een wetenschappelijk hoofdambtenaar. Timman projecteerde in het totaal 29 personeelsleden, afgezien van de hoogleraren. In een nadere uitwerking vroeg hij 16 medewerkers voor 1957, oplopend tot 33 in 1960. In feite zouden er in 1958 28 personen in dienst van de TH ressorteren onder het Instituut voor Toegepaste Wiskunde. In 1962 bij de verzelfstandiging van de dienstverlening gingen er 38 over naar de Wiskundige Dienst, het latere Rekencentrum. In het organisatieschema van het ITW (Fig. 5) uit de *Nota*, bleek nog eens duidelijk de centrale maar aan de toegepast wiskundige onderworpen positie van het numerieke werk. Dit betekent dat Timman net als Van Dantzig het consultatiemodel van van bruikbaar maken van wiskunde voor ogen stond. De wiskundig ingenieur, cq toegepast wiskundige, verdiepte zich in het probleem van de technicus en deed in feite het modelleerwerk.

Fig. 5 Organisatieschema van het Instituut voor Toegepaste Wiskunde zoals ontworpen door Timman in 1955



adequaatheidsoverweging binnen het toepassen gehaald

Het cruciale element in Timmans visie was de adequaatheidsoverweging die hij *binnen* het toepassen haalde. Precies op dit punt was zijn visie radicaler dan die van Von Mises; hier brak hij met de klassieke toegepaste wiskunde. Timman plaatste consequent "toegepaste wiskunde" tussen aanhalingstekens; hij bedoelde er inderdaad het zijne mee. Hij vond het essentieel om in het proces van toepassen de afweging te maken dat er gewerkt werd met een "*technisch zinvolle* formulering" en om de uitkomst nog eens aan het technisch adequaatheidskriterium te onderwerpen. Ook als het wiskundig onbevredigend was, kwam het erop aan door te werken met steun van de ervaring die het ene resultaat wel, het andere niet *geloofwaardig* zou achten.

Van Dantzig zou hier zeggen: om te controleren of de sprong van doel op middel niet te groot was gemaakt. In hun nadruk op interpreteren van het resultaat, "uitschakelen van het formalisme", stemmen zij wonderwel overeen. Het lijkt een Nederlandse bijzonderheid dit zo expliciet te vermelden. Het zou zelfs een invloed van Mannoury kunnen zijn. Van Dantzig was een leerling van Mannoury en Timman volgde diens colleges en citeerde hem in zijn inaugurele rede.

8.b Timmans opleidingsplan

Het was volstrekt duidelijk met welke verwachting de onderafdeling Wiskunde, van de Afdeling Algemene Wetenschappen van de TH, Timman naar Delft haalde. In 1947 was de notie van mathematisch ingenieur als een onvervulde wens blijven liggen; hier was iemand die gezien zijn achtergrond en capaciteiten in staat geacht mocht worden invulling aan het idee te geven. Na Timman in 1952 werden er een aantal uitdrukkelijk toepassingsgerichte mensen tot hoogleraar benoemd. L. Kosten in 1956, J.W. Cohen in 1957 en E. van Spiegel in 1960. Ook de hoogleraar voor de 'Mathematische en toegepaste statistiek', J. Hemelrijk (1952) en diens opvolger J.W. Sieben (1961), zouden lid worden van het Instituut voor Toegepaste Wiskunde. Dat het na Timmans aanstelling nog vier jaar duurde voor de opleiding van start kon gaan, in 1956, had inhoudelijke en bureaucratische oorzaken. De onderafdeling liet zich gemakkelijk overtuigen door de opeenvolgende voorstellen van Timman –de boven geciteerde nota was het vierde stuk over deze zaak–, maar de buitenwacht zag de noodzaak van zo'n opleiding niet zonder meer in.

onderwijsraad

Afdeling, senaat en rector magnificus (op dat moment Bottema) vroegen om verheldering; echt ernstig bezwaar had de Onderwijsraad, adviesorgaan van de minister. Aanvankelijk strandde het plan daar eenvoudig. Gevraagd om toelichting argumenteerde de raad uiteindelijk dat er toch ook geen mathematisch psychologen, mathematisch biologen enz waren; waarom dan wel mathematisch ingenieurs? De Onderwijsraad kende wel de wiskunde als autonoom universitair vak, dezelfde wiskunde die in Delft als basisvak gedoceerd werd, maar had grote

moeite met de nieuwe onbekende stijl van wiskunde-beoefening te erkennen, wiskunde als verzelfstandigde hulpwetenschap. Timman had het de raad ook niet bijzonder gemakkelijk gemaakt. Zijn voorstellen waren zo doortrokken van de wens tot compromis dat ze op dit essentiële punt niet erg helder waren. Pas toen de bijeengeroepen delegaties van de wiskunde-groepen van de universiteiten geen bezwaar of verbazing toonden bij het Delftse initiatief - hooguit vrees voor concurrentie -, gaf de raad zijn verzet op en adviseerde de minister na nog een hele poos nadenken positief.
Zo kreeg de Afdeling A toestemming om in 1956 met de opleiding tot Wiskundig Ingenieur te starten. Het was een bovenbouwstudie, aansluitend op een propaedeuse in een van de technische vakken. Studenten kenden dus de wiskunde slechts als basisvak, tot op het moment waarop ze begonnen aan de Wiskundig Ingenieursopleiding.
De opbouw van het curriculum werd in 1953 in concept door Timman ontworpen en in 1956 voor het eerst in de praktijk gebracht in een vrijwel ongewijzigde structuur (Fig. 6)

numerieke analyse

Het programma begon dus pas met het derde jaar, na de propaedeuse en voorzover dit jaar toepassingsgerichte wiskunde bevatte, bood het klassieke toegepaste wiskunde met uitzondering van één college met oefeningen, 'Numerieke Analyse', dat aanvankelijk door Timman, vervolgens door L. Kosten en vanaf 1961 door E. van Spiegel werd gegeven. Pas in 1958 werd het derde jaar verrijkt met een college 'Waarschijnlijkheidsrekening', aanvankelijk door J. Hemelrijk, vanaf 1960 door J.W. Cohen gegeven, en een college 'Algemene Elektronica'. 'Gebruik van elektronische rekenautomaten' van D.H. Wolbers verving dit laatste college in 1963.
Het meer kenmerkende voor de nieuwe toepassingen werd bewaard voor het vierde studiejaar: 'Partiële differentiaalvergelijkingen', 'Laplace- en Fouriertransformaties' - beide "klassiek", maar in Timmans toepassingen zeer actueel -, 'Mathematische statistiek' en 'Theorie der rekenmachines'.
Numerieke analyse was zo het meest eigene waarmee de wiskunde-studenten, na hun P-examen elders, ontvangen werden. Het college betrof:

> "A. Interpolatiemethoden, numerieke integratie en differentiatie. Oplossingsmethoden van algebraïsche en transcendente vergelijkingen met één onbekende. Integratiemethoden van gewone differentiaalvergelijkingen.
> B. Oplossingsmethoden van systemen lineaire vergelijkingen, iteratiemethoden. Numerieke bepalingen van eigenwaarden en -vectoren van matrices. Oplossingsmethoden van partiële differentiaalvergelijkingen, relaxatie- en karakteristiekenmethoden".

Dit was inderdaad de geavanceerde kennis van de numerici/ rekenvoorbereiders van het NLL en het MC. De praktische vaardigheid in het toepassen van deze kennis had zowel Van Wijngaarden als Timman groot gemaakt. Maar "numerieke analyse" verwees naar een vakgebied dat juist in het midden van de jaren vijftig uiteenspatte, in programmeren, numerieke programmatuur, numerieke wiskunde en wetenschapppelijk rekenen.

Fig 6: Ontwerp en realisatie van het studieprogramma voor de Wiskundig Ingenieursopleiding

Het studieprogramma van de Wiskundig Ingenieursopleiding

Voorstel-programma voor de opleiding tot Mathematisch Ingenieur door de Sub-Afdeling der Wiskunde.
naar *Memorandum Timman* (1953)

Propaedeuse, eerste en tweede studiejaar
Wiskunde:
Analyse I en II, incl. IIb
Analytische Meetkunde I en II
Beschrijvende Meetkunde
Vectorrekening

Natuurkunde AI en AII (Mechanica en warmteleer, Elektriciteit, Optica, Electronen - atomen - moleculen)
Practische oefeningen Natuurkunde
Inleidingen in Metallogie, in Werktuigonderdelen (met tekenoefeningen), in Thermodynamica, in Wisselstroomtheorie en in Stromingsleer.
Twee jaar inleiding in naar keuze: Scheeps-, of Vliegtuig-, of Werktuig-bouwkunde

Derde studiejaar
Wiskunde:
Numerieke analyse
Waarschijnlijkheidsrekening
Potentieeltheorie
Functietheorie en conforme transformaties
Fourier reeksen en integralen
Theoretische Mechanica
Verder een specialisatie-cluster Toegepaste Mechanica (Sterkteleer en Grafostatica, Stromingsleer), of Theoretische Natuurkunde, of Elektriciteit.
Voorts een keus gericht op Electronica, of Mechanica, of Scheepsbouwkunde, of Vliegtuigbouwkunde.

Programma Wiskundig Ingenieursopleiding in 1956, en de wijzigingen daarop in 1958 en 1961.

Propaedeuse in een van de technische vakken.
De opleiding startte in 1956 zonder eigen propaedeuse, zodat de in deze fase geplande extra's (Anal. IIb; A.M. II; Vectoranalyse) naar het derde jaar schoven.

Derde studiejaar
Kernvakken 3e jaar in 1956:

Grondslagen analyse (An. IIb)
Lineaire transformaties (A.M. II)
Vectoranalyse**
Numerieke analyse*
Functietheorie
Theor. Mechanica (in 1957 keuzevak)
Erbij in 1958
Waarschijnlijkheidsrekening
Grondslagen differentiaalverg.
Inleiding Electronica
Technische keuzevakken in clusters, geen keuzevakken wiskunde.

Toelichting
Bij de **Propaedeuse**:
Analyse en Analytische Meetkunde I waren de meest algemene vakken van de TH, in alle propaedeuses verplicht. Analyse IIb (convergentie, m.n. van Fourier-reeksen en -integralen), aan de universiteiten een normaal vak en essentieel voor alle begripvol approximeren, was hier alleen verplicht voor Werktuigbouwstudenten in de research-richting. Het kwam als "Grondslagen der analyse" in het 3e jaar terecht.
Analytische Meetkunde II kwam als "Lineaire transformaties", later "Lineaire Algebra", in het derde jaar.
Waarom Timman Beschrijvende Meetkunde nog opnam is niet duidelijk. Vectoranalyse en zoveel Natuurkunde als Timman voorstelde waren overigens alleen voor studenten Natuurkunde, Metaalkunde en Elektrotechniek voorgeschreven.

Bij het **derde jaar**:
Numerieke Analyse was al in 1953 Timmans vak; verplicht voor Werktuig-, Scheeps- en Viegtuig-bouwkunde. Waarschijnlijkheids- rekening was een bestaand keuzevak, pas in 1958 verplicht voor wiskunde. Potentiaaltheorie werd aangestipt in het vak Vectoranalyse, werd in 1961 een apart keuzevak. Functietheorie was inderdaad verplicht in 3e jaar. In 1960 doceerde Timmans medewerker Geurst het nieuwe keuzevak Conforme Afbeeldingen. Fourier-reeksen en -integralen werden behandeld in Grondslagen der Analyse, in 1962 en 1965 gaf De Hoop het algemenere keuzevak Wiener-Hopftechnieken.

Vierde en vijfde studiejaar
8 van de volgende 9 wiskundevakken:
Integralen van Lebesque
Groepentheorie
Functionaaltransformaties
Partiële differentiaalvergelijkingen
Integraalvergelijkingen
Variatierekening
Matrixrekening
Tensoranalyse
Niet-lineaire differentiaalverg.
Practische oefeningen in de numerieke wiskunde
Verder een cluster van drie "jaaruur" uit:
Mechanica, of Scheepsbouwkunde, of Vliegtuigbouwkunde.

"Het **zesde studiejaar** bestaat voornamelijk uit het zelfstandig uitvoeren van een onderzoek onder leiding van één der hoogleraren in de wiskunde of één der hoogleraren in de theoretisch-technische vakken. ...
Ook zou de student, desgewenst zijn afstuderen op een research laboratorium kunnen doen, waarbij natuurlijk een hoogleraar verantwoordelijk blijft voor het afstuderen."

Vierde en vijfde studiejaar
Kernvakken 4e jaar in 1956:
Partiële differentiaalverg.*
Bijzondere functies
Theorie der rekenmachines/ Num. An. C met practische oefeningen** (120 uur)
Laplace- en Fouriertransformaties**
Mathematische Statistiek
1958 - 1960 bovendien:
A. Mathematisch-fysische richting met kernvak
Theoretische Mechanica
B. Mathematisch-organisatorische richting met
Stochastische processen
Operationele Analyse**
Kernvakken 4e jaar m.i.v. 1961:
Operationele Analyse**
Functionaal-/Grondslagen Toeg.- Analyse*
Num. An. C, met pract. oefeningen**
Laplace- en Fouriertransformaties**
Toegepaste Statistiek

Vier technische keuzevakken.
Vier wiskundige keuzevakken uit:

num. anal. bijz.ond.**	part. diff. vgl.*
bijz. functies	math. statistiek
stoch. processen	theor.mech. bijz.
differentie-rek.	approximatie-th.
potentiaaltheorie	maattheorie
niet-lin. diff.vgl.	theorie matrices
asymptot. ontw.*	toeg. stat. bijz.
integraalvgl.	variatierek.
tensoranalyse*	conforme afbeeld*
algebra	groepenth. (nat.)
tijdreeksen	wachttijdprobl.**
toeg. getaltheorie	Wiener-Hopftechn.
diffractietheorie.	

Bij het **vierde jaar**:
De meeste vakken die Timman hier noemde, bestonden nog niet in 1953 en werden later keuzevakken. Lebesque-integralen werd opgenomen in Maattheorie; Groepentheorie werd geleerd in Algebra, toegepast in Groepentheoretische grondslagen van de quantentheorie/ Representatietheorie; Functionaaltransformaties werd gedoceerd als het kernvak Laplace- en Fouriertransformaties; de overige colleges verschenen onder dezelfde naam als in Timmans memorandum. Timman had dus veel voorzien in 1953, maar niet Mathematische Statistiek (1956), Stochastische processen (1957) en Operationele Analyse (1958).

Bij het *Programma* 1956 e.v.:
In het algemeen was Timman in zijn voorstel te optimistisch geweest over het aantal wiskundevakken en over de fase waarin deze in de studie geplaatst konden worden.
In een aantal vakken waren Kosten en Timman (gemarkeerd**, resp.*) wegbereider: door deze zelf voor de eerste maal te geven en ze deels vervolgens aan anderen over te laten.

In 1956 waren er geen keuzevakken in de wiskunde - slechts in het technische deel keuze uit een aantal clusters -, in 1958 vier keuzevakken bij twee afstudeerrichtingen, in 1961 ineens vijfentwintig wiskundige keuzevakken bij één afstudeerrichting. Toen had de hele onderafdeling zich laten inspireren door de nieuwe studierichting tot bijzondere eigen colleges.

8.c Varianten op weg naar de opleiding in wiskundig modelleren

werktuigbouwkundige wiskunde

In 1948 vormde de Afdeling WSV (Werktuigbouw, Scheepsbouw en Vliegtuigbouwkunde) van de Technische Hogeschool een vierde subafdeling, Wiskunde. Impliciet lag daarin besloten dat het mogelijk werd om in deze subafdeling af te studeren: bij Burgers en bij Biezeno. Vanaf 1949 werd deze mogelijkheid gerealiseerd. In 1955 stelde ook de Subafdeling Vliegtuigbouwkunde een wiskundige afstudeerrichting in. De door Biezeno gewenste variant had zich dus ook doorgezet, maar de eigenlijke Wiskundig Ingenieursopleiding begon toch in de Afdeling A in 1956. Wel wordt bijzonder duidelijk dat de overheersende beeld dat van de ingenieurswiskunde als verzelfstandigde hulpwetenschap is.
De Universiteit van Amsterdam kreeg in dat zelfde jaar toestemming voor baccalaureaatsopleidingen in de wiskunde en de natuurkunde, verkorte bedrijfsgerichte opleidingen, maar die zijn nooit van de grond gekomen. Ook vanaf 1956 verzorgde het Mathematisch Centrum in Amsterdam cursussen Wetenschappelijk Rekenen. In 1957 werd Bouwkamp buitengewoon hoogleraar Toegepaste Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Utrecht, waardoor een marginale optie op afstuderen in toegepaste richting ontstond. In 1958 werd Timmans vroegere NLL-collega Van de Vooren benoemd in Groningen. Hij beijverde zich met succes voor een Groningense ingenieursopleiding, zij het dat men er pas in 1971 met terugwerkende kracht het ingenieursdiploma mocht uitreiken aan afstuderenden in de toegepaste wiskunde. Van de Vooren stond qua visie op de wiskunde zeer dicht bij Timman, de lesstof was geënt op dezelfde research-ervaring en de Delftse voorbeelden.
Zo was de Wiskundig Ingenieursopleiding ingebed in een hele reeks van initiatieven om de wiskunde dienstbaar te maken. De directe navolging vond evenwel plaats, na Groningen, in Eindhoven en Enschede waar juist in die tijd nieuwe Technische Hogescholen van start gingen

eenzijdig numerieke analyse

Dat de wiskundig ingenieursopleiding startte zonder eigen propaedeuse, was slechts één van de tekenen dat het concept nog niet volledig uitgekristalliseerd was. Het college-aanbod vertoonde geregeld accentverschuivingen. Afstudeervarianten werden ingesteld en weer opgeheven. Er was conceptueel voldoende ruimte voor andere instellingen om op het Delftse initiatief te variëren.
In de Nederlandse wiskunde-beoefening van de jaren vijftig was de Delftse wiskundig ingenieursopleiding wel het belangrijkste toepassingsgerichte initiatief, de invulling met "numerieke analyse" was een eenzijdige. Het wiskundig modelleren was in Timmans werk wel begrepen, maar in deze eerste versie van de opleiding nog niet ten volle uitgewerkt. En buiten de academische wiskunde drong de Operations Research op. Ook in de OR en de toegepaste statistiek stond het modelleren centraal, zij het voortkomend uit een andere traditie en bekleed met een andere status. Timman had aanvankelijk (1953) die twee richtingen met

zoveel woorden uitgesloten:

"de opleiding tot statisticus [behoort] op geheel andere basis dan hier beoogd is, te geschieden".

"de bedrijfsorganisatorische vakken [die] voor een toegepast wiskundige nauwelijks van belang geacht kunnen worden"

Toch was dit de voornaamste onopgeloste kwestie: het vinden van een opening in de richting van (bedrijfs-)organisatorische toepassingen. De opkomst van de Operations Research was voor de betrokkenen zichtbaar. Niet zo duidelijk was het vanuit de overheersende stijl van "numerieke analyse", hoe men greep zou kunnen krijgen op deze kennelijk verwante ontwikkeling.

twee richtingen

Het afstuderen werd in 1958 onderscheiden in twee richtingen. In feite kwam er een richting bij. De "mathematisch-fysische richting" was gelijk aan het bestaande programma; de "mathematisch-organisatorische richting" bracht nieuwigheden met colleges 'Stochastische processen', door Cohen, en 'Operations Research' door Kosten. In 1959-1960 werden ze a- en b-richting met "meer nadruk op" en "voor beide richtingen zijn de eisen voor numerieke methoden en de meeste wiskundevakken dezelfde". In 1961-1962 verdween het onderscheid weer. Richtingen werden keuzevakken. Nu was de nadruk op "vraagstukken van organisatorische aard, zoals optreden bij "operations research", statistiek en stochastische processen", ook nog geen doorbraak naar bedrijfskundige toepassingen. Bedrijfskunde bestond in Nederland nog niet als academische discipline, maar belangrijker was dat Cohen en Kosten in dezelfde stijl als Timman toepassingsgericht waren. Kosten was electrotechnisch ingenieur, uit de sterk wiskundige zwakstroomrichting; Cohen was zelf geschoold in de onderwereld van Biezeno. Hun toepassingsstijl veronderstelde, net als die van Timman, dat de technisch-wetenschappelijke kwantificering gedaan was, dat de wiskundige reeds een model - zij het een onderhandelbaar model - aangeboden kreeg. Hun eigen werk was dan ook gericht op "organisatorische" vraagstukken waar deze veronderstelling vervuld was, zoals congestie in telefooncentrales en andere studies van verkeersstromen. Bedrijfsorganisatorische vraagstukken en statistische consultatie voldeden niet aan deze vooronderstelling, vroegen om een andere benadering in het toepassen.

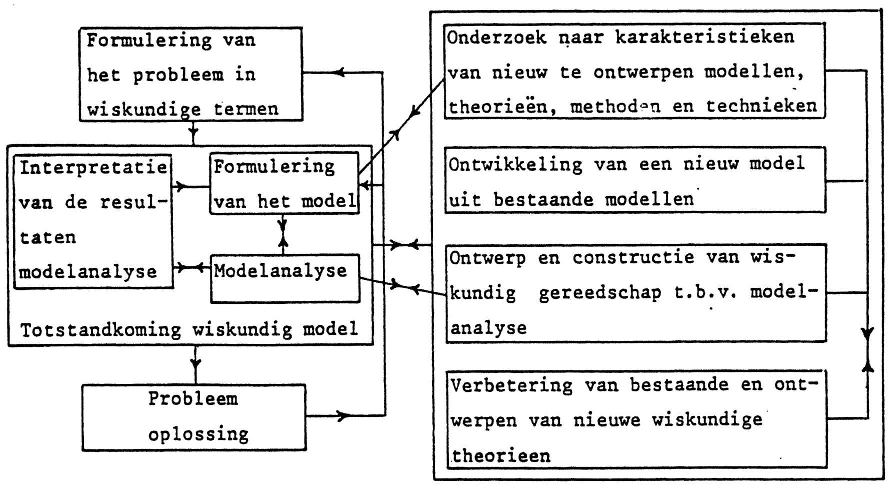
Eindhoven

De Eindhovense onderafdeling wiskunde kwam op dit punt verder dan haar voorbeeld. Haars ondanks kwam ze verder, want eigenlijk waren J.J. Seidel en G.W. Veltkamp veel klassieker in hun visie op toegepaste wiskunde.

Seidel, de man die was aangesteld om de onderafdeling wiskunde op te bouwen aan de THE, en Veltkamp, het door Seidel aangetrokken jonge talent dat de Wiskundig Ingenieursopleiding invulling moest geven, waren niet, zoals Timman, zelf gevormd door de technisch-wetenschappelijke research van die tijd. Getweeën maakten zij een oriëntatiereis door de Verenigde Staten om hun eerste ideeën omtrent de opzet van een studieprogramma voor Wiskundig Ingenieur te toetsen aan de Amerikaanse opvattingen en praktijken. Met uitzondering van John Tukey spraken ze er ongeveer iedereen die maar iets met mathematical engineering van

doen had. De reis bracht hen onder meer in contact de chemicus Baron van het Shell-laboratorium in San Francisco. Deze Baron gaf twee gouden tips. De ene was het door Veltkamp overgenomen adagium: vigor, not rigor, dat wil zeggen wiskunde die werkt en niet wiskunde die streng bewezen is. De tweede tip was dat het geluk thuis om de hoek lag. Op het Amsterdamse Shell-laboratorium werd Operations Research van hoog niveau verricht. J.F. Benders was een van degenen die daar werkte en in enkele fasen van onderhandeling wist Seidel deze wiskundige over te halen naar Eindhoven te komen. Benders eiste en kreeg uiteindelijk de ruimte voor een volledige specialisatie in de bedrijfsorganisatorische richting. Zo kreeg de opleiding in Eindhoven een breedte die in Delft niet bereikt was.
Was men in Eindhoven al een stapje terug begonnen, in basisvak-visie op de rol van wiskunde, aan de THTwente begon men twee stappen terug, met de wiskundigen verspreid over de technische afdelingen. Hier moest men opnieuw het wiel uitvinden, wat onder aanvoering van Zandbergen met overgave gebeurde. Een eigen Afdeling Toegepaste Wiskunde werd gevormd en in 1968 startte er de Wiskundig Ingenieursopleidng. In de motivatie van het curriculum zat het besef dat het toepassen van wiskunde niet alleen in nog veel meer richtingen zou kunnen gaan dan die twee hoofdstromen, maar dat de Wiskundig Ingenieur voor willekeurig welk probleem zou kunnen komen te staan. Om dan zinnig te kunnen reageren moest de wiskundige hebben leren nadenken over zijn vak. Reflectie op het toepassen, op de maatschappelijke positie van het vak in het algemeen, werd een integraal deel van de opleiding. Daarmee was de *Wiskundig Ingenieursopleiding* tenslotte ten volle een *opleiding in het wiskundig modelleren* geworden!

In 1971 verscheen, om te beginnen in Eindhoven, het wiskundig modelleren in de colleges, namelijk in de vorm van een *modellenpracticum.*
In 1972 sloegen de wiskundigen van de drie TH's de handen ineen om, naar aanleiding van de herstructurering van het wetenschappelijk onderwijs, een gezamenlijke structuur van de opleiding te ontwikkelen. In het advies van die commissie stond het wiskundig model centraal.



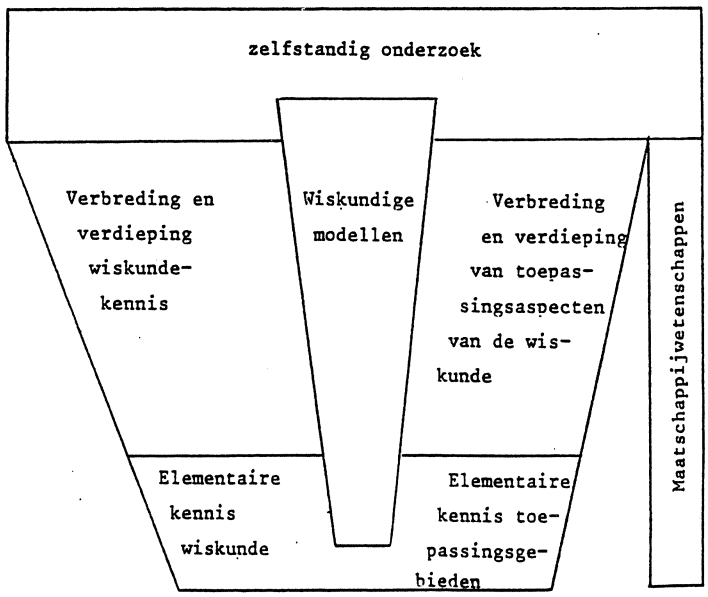


Fig. 7 Visie op het werk van de Wiskundig Ingenieur in 1972
en het beeld van de opleiding,
waarin het wiskundig model centraal staat.

9. WISKUNDE ALS TECHNIEK

In het wiskundig modelleren kwamen de beide tradities die rond 1800 uiteengegeaan waren weer samen. Wiskundig model kwam zowel naar voren uit een relativering van de toegepaste wiskunde als uit het mathematiseringsstreven. De relativering van de klassieke toegepaste wiskunde zette al in bij Hertz en vond haar voltooiing bij Burgers. Het mathematiseringsstreven ontwikkelde zich tot een algemene, herkenbare benadering bij Tinbergen en Van Dantzig.
Het wiskundig modelleren is expliciet geworden mathematisering, niet zomaar een benadering maar een procedure. Zo werd in het wiskundig modelleren wiskunde zelf een techniek.
Deze techniek kan onderwezen worden. De Wiskundig Ingenieursopleiding is de opleiding in wiskundig modelleren, zo bleek in de verdere ontplooiing van het curriculum.

9.a Instrumentele wiskunde

Tinbergens werk was exemplarisch voor wat er gebeurde in het veld van statistiek en politieke rekenkunde dat na 1800 buiten de zuivere en toegepaste wiskunde was komen te staan. Het vond er ook navolging, allereerst in de econometrie zelf en vervolgens in domeinen als de statistiek, de demografie en de bedrijfsleer.
Dat deze gebieden buiten de klassieke toepassing van de wiskunde stonden is maar één aspect. Cournot en Walras hadden bijvoorbeeld in de negentiende eeuw wel degelijk pogingen ondernomen om tot een mathematische theorie van de economie, dat wil zeggen binnen het toegepaste-wiskunde-paradigma, te komen. Ook Tinbergen begon vanuit dat streven.
Het cruciale was dat de overheersende intentie hier niet zonder meer werkelijkheidsapproximatie was, maar sturing van de beschreven werkelijkheid. Bij Hertz was doelmatigheid toch allereerst zuinigheid, Occam's razor, Mach's denkeconomie. Bij Tinbergen ging het om adequaatheid aan een gegeven doel; waarheid blootleggen of de werkelijkheid benaderen waren mogelijke doelen, naast andere. Voorop stond het instrumentele perspectief van "het mechanisme" en "de mathematische machine".

verbreiding

Zowel Tinbergen als Van Dantzig gebruikten rond 1930, in de aanloop tot de formulering van het wiskundig modelbegrip, het nergens echt gedefinieerde werkwoord mathematiseren. Het begrip "wiskundig modelleren" duidde aan dat ze

het mathematiseren expliciet maakten en beseften een algemene procedure op het spoor te zijn. Letterlijk gebeurde het zo bij Van Dantzig: 'General procedures of empirical science'(1947). De verbreiding van het wiskundig modelleren voltrok zich in Nederland vlot door mensen als J. Engelfriet in de verzekeringswiskunde, W. Baarda in de geodesie, A.D. de Groot in de psychologie en R. Timman in de wiskundig ingenieursopleiding, en iets minder vlot natuurlijk in de klassieke toegepaste wiskunde.
De inzet van wiskundig denken waarop Bernard de Fontenelle in abstracto zijn hoop had gevestigd, was nu mogelijk als een te volgen procedure. Met het wiskundig model was het wiskundig denken in instrumentele vorm beschikbaar. Het mathematiseringsstreven was geconcretiseerd in een technische wiskunde. Wiskundig modelleren, soms gepresenteerd onder de noemer "de wetenschappelijke methode", functioneerde in de jaren vijftig inderdaad als teken van moderniteit, van vooruitgang in wetenschappelijke en in maatschappelijke zin. Het vooruitgangsgeloof van de Verlichting, dat steeds de vorm had gehad van een ideologie, was gestold in het wiskundig modelleren.

mathematisering

Mathematisering is een constante van moderne wetenschap. Het is er een van de constitutieve elementen van. Galilei's studie-object kwam pas tot stand onder het gezichtspunt van uitwendige structureerbaarheid, dat wil zeggen in de veronderstelling dat de erin aan te wijzen structuur enerzijds als losstaand van het object beschouwd kan worden, anderzijds toch adequate kennis verschaft omtrent hetzelfde object. Als het om theorievorming gaat, is mathematisering de veronderstelling dat de wezenlijke verbanden tussen de begrippen telkens in kwantitatieve relaties (in het algemeen: als structuur-elementen) uitgedrukt kunnen worden. Hoewel men sporen van mathematiseringsdebatten kan terugvinden, is mathematisering in de praktijk van de moderne wetenschap steeds een stilzwijgende aanname. Het duidelijkst, want meest op zichzelf, vinden we de aanname terug in de Baconiaanse of experimentele traditie. Hij is veel moeilijker te isoleren in het wiskundig wereldbeeld van de Cartesiaanse en de Newtoniaanse traditie, dat we bij Lagrange op de spits gedreven vonden. Daar was niet alleen mathematisering verabsoluteerd (andere gezichtspunten verwaarloosd), maar de erop steunende feitelijke wiskundige formulering over de werkelijkheid heen geschoven. Binnen zo'n wiskundig wereldbeeld is het volkomen legitiem de objecten te behandelen alsof ze wiskundige objecten zijn, te doen alsof wiskundige inzichten zich zonder meer laten overplanten op fysische samenhangen; hetgeen dan ook gebeurde in de toegepaste wiskunde. Het *wiskundig model* kan gezien worden als relativering van het wiskundig wereldbeeld.

> "..."Erklärungen" werden zu Abbildungen..."Hypothesen" zu wilkürlichen Festsetzungen..."

De vroegste vermeldingen van het begrip wiskundig model kwamen naar voren in het kader van relativerende reflecties uit deze hoek, synoniem met "working model of the universe" bij Jourdain; met "théorie partielle" bij Borel
Toch waren de klassieke toepassingsgebieden relatief laat met het algemeen aanvaarden van het begrip. Het wiskundig wereldbeeld was in feite een logisch-

mathematisch wereldbeeld. Voorzover er onderscheid werd gemaakt tussen het wiskundige en het logische, in het bijzonder sinds Bolzano, verscheen het mathematische als interpretatie of uitbeelding van een in logische axioma's gevatte visie op de wereld. Nog bij Jourdain was de wiskunde niets dan een verbijzondering van de logica. In het wiskundig modelleren ontworstelde het wiskundig denken zich aan dit reductionisme. Het begrip wiskundig model verschijnt in een empirisch georiënteerde reactie op de logicistische visie op de wiskunde.

van stilzwijgende opvatting naar procédé

Maar juist los van dergelijke verabsoluteringen is mathematisering een constante van moderne wetenschap. De herhaaldelijk optredende roep om wiskundige methoden en formuleringen, zoals van de Verlichtingsfilosofen en van Laplace, was een indicatie, het is niet de mathematisering zelf. Voor de betreffende werkelijkheidsopvatting was dan impliciet al gekozen. Zoals in de negentiende eeuw in de opkomst van onderzoek het kriterium van wetenschappelijkheid veeleer op de werkwijze, op houding en vraagstelling, kwam te liggen dan op resultaat en waarheid, zo werd ook, naast de resulterende wiskundige formulering, het streven naar die formulering onderkend als een werkwijze. Mathematisering werd van stilzwijgende werkelijkheidsopvatting tot een manier van doen die bijzonder productief bleek voor het wetenschappelijk kennen. In de twintigste eeuw, met het tot uitdrukking komen als methode begon ook de term *mathematisering* vaker te verschijnen in de literatuur. Het expliciet maken van deze werkwijze (deze werkelijkheidsopvatting) resulteerde in de procedure van schematiseren, vereenvoudigen en idealiseren; uiteindelijk in de het procédé van wiskundig modelleren.

Het conjunctuuronderzoek was op voorhand gemathematiseerd, men onderzocht economisch gedrag aan de hand van (prijs)schommelingen (schommelingen die ook los van de economische context bestudeerd konden worden als voorbeeld van golfbeweging). Tinbergen zocht onder de aanname dat hij een "mechanisme" zou vinden. Deze manier van doen hernam hij, maar nu expliciet, in 1936, beginnend met een "kwantitatieve stylering", eindigend met een "economisch model".

expliciet geworden mathematisering

Mathematisering kenschetsten we als beschouwen onder het gezichtspunt van uitwendige structureerbaarheid: het beschouwen van een zaak alsof hij voorgesteld kon worden als opgebouwd volgens een structuur die losstaat van de zaak zelf. Zo'n voorstelling biedt het wiskundig model: een structuur, in het algemeen een stelsel vergelijkingen, en daarbij een rijtje definities van de variabelen en samenhangen, dat het geheel tot een voorstelling van de zaak maakt. Wiskundig modelleren kunnen we daarom beschouwen als expliciet geworden mathematisering.

pragmatisme

In het procédé verwierf het wiskundig denken zelf een technisch aspect. In de jaren veertig en vijftig kwamen een aantal lijnen samen in het wiskundig modelle-

ren, gegroepeerd in de drie stromen van relativering van klassieke toegepaste wiskunde, onttrekken aan reductie tot logica en expliciet worden van mathematisering. Het samenkomen schiep veeleer een gelijkwaardigheid dan een eenheid. De verschillende achtergronden toonden zich in uiteenlopende stijlen binnen het wiskundig modelleren. Het accent lag nu eens op deeltheorie, dan op uitwerking van op pragmatische gronden gekozen hypothesen, dan weer op kwantitatieve stylering.
De gemeenschappelijke kenmerken zijn te verwoorden als een pragmatisme:
* Pragmatisme in de zin van gerichtheid op handelen, bijvoorbeeld op technisch ingrijpen of op rationalisering van een beslissing.
* Pragmatisme in de zin betrekkelijke willekeur in het stellen van een beeld, in tegenstelling tot een strikt waarheidsstreven. De vraag of het gestelde een wezensinzicht bevat, wordt opgeschort.
* Pragmatisme in de zin dat met het model gewerkt, gerekend, moet kunnen worden. Weergave van de werkelijkheid en rekenapparaat vallen samen.

9.b Wereldbeeld

Naast die min of meer uiterlijke kenmerken van het wiskundig modelleren, blijft gelden dat er iets uitgebeeld wordt in de wiskunde: het beeld is wiskundig en aanname dat het zinvol is zo'n beeld te maken (de aanname van mathematiseerbaarheid) is weliswaar omgezet in een procedure, maar blijft ook als aanname staan. Het is nu eenmaal niet vanzelfsprekend de werkelijkheid te benaderen onder het gezichtspunt van zijn structureerbaarheid.
Het typisch wiskundige van wiskundige modellen ligt in het gegeven zijn van een wiskundige structuur, een domein van objecten met relaties daarop. Gegeven is niet primair de formele aanduiding van een structuur (zoals in de logica), maar de structuur zelf, als structuur, dat wil zeggen als vrij gesteld exemplaar van een bouwsel. Het vrij stellen is de wiskundige willekeur, weerspiegeld in de uitwendigheid van de in iets anders bestudeerde structuur. In de werkwijze van het modelleren geeft dit de flexibiliteit.
Het als uitwendig beschouwen van de structureerbaarheid, de mathematische willekeur, het vrij stellend karakter van het wiskundig denken en de flexibiliteit horen bij elkaar.
De flexibiliteit houdt zowel de mogelijkheid om aan te passen aan het object waarvoor een model wordt ontwikkeld, als om te schikken naar specifieke doelen. Een bijzonder vorm van flexibiliteit volgt evenzeer uit het wiskundig karakter, namelijk de mogelijkheid om de relaties in een structuur op verschillende, gelijkwaardige wijzen te stellen, als relaties, functies of operaties.

niet per se axioma's

In de praktijk van het modelleren blijken de hypothesen en axioma's waar in de voorgeschiedenis zoveel over te doen was, nauwelijks een rol te spelen. De inleidende overwegingen die aan de hand van kenmerken van het gemodelleerde object uitleggen waarom juist deze en niet een andere formule is gekozen, hebben, om met Tinbergen te spreken, een stylerende functie. Ze leiden niet tot axioma's, maar monden rechtstreeks uit in de vergelijkingen die het model vormen. De symbolen (variabelen en constanten) waarmee gewerkt wordt, worden eenmalig gedefinieerd in woorden, veeleer gedeclareerd dan verklaard. Men beeldt uit in wiskundige stof wat men over een zeker object denkt, maar het is niet noodzakelijk dat die gedachten zelf eerst weer in de vorm van axioma's genoteerd worden.

aflossing van paradigma

Hertz' kriteria van consistentie, overeenstemming en doelmatigheid gelden in principe wel, maar het accent ligt helemaal op het laatste. Voor consistentie wordt eenvoudig gezorgd door binnen een bekende wiskundige theorie te werken. Deze optiek konden de wiskundigen kiezen, omdat anderhalve eeuw zuivere wiskunde een enorme rijkdom aan kennis omtrent structuren had opgeleverd. In plaats van overeenstemming op ieder punt vraagt men doeltreffendheid: relevantie en vertaalbaarheid van het resultaat voor de bestudeerde situatie. Het kriterium van doelmatigheid krijgt in het modelleren zijn volle betekenis van adequaatheid aan een zeker doel. Waarheid of inzicht is maar één van de mogelijke doelen. Binnen het spectrum van relevante modellen zijn zuinigheid en eenvoud vooral belangrijk voorzover ze in dienst staan van uitvoerbaarheid van de berekeningen. Een cruciaal element in de kunst van het modelleren blijkt de gave te zijn het evenwicht te vinden tussen doenlijkheid van relevant rekenwerk, en mate van detaillering van het wiskundig model.
Al groeide in de verschillende gebieden niet helemaal dezelfde praktijk van wiskundig modelleren, de acceptatie van het begrip in de jaren vijftig was nagenoeg algemeen. Het benoemde een verhouding tussen wiskundig denken en "werkelijkheid", tussen wiskunde en toepassingsgebied, die al enige tijd in ontwikkeling was. Het paradigma van het modelleren loste dat van de toegepaste analyse af.

instrumenten voor idealen

De luidruchtige ideologie van de Verlichting, de utopie van mathematisering, die zich sinds Laplace los van de zuivere en toegepaste wiskunde ontplooid had, verscheen in de jaren 1940 in de minder pretentieuze en concreter gestalte van wiskundig modelleren. Met de contemporaine commentatoren kunnen we spreken van een 'vooruitgangsgeloof', het was een gestolde Verlichting: geloof en energie gestoken in concreet geworden rationalisering –instrumenten voor idealen.

terugkeer

Het perspectief van werken aan een betere wereld was nog altijd aanwezig, toen ze in deze gestalte het contact hervond met de wiskunde-beoefening. Ongeacht dit perspectief kwam hier een traditie naar boven die nu gelijkwaardig naast de gerelativeerde klassieke toepassing stond. De gelijkwaardigheid hield niet in dat de toepassers hun dedain voor de statistici helemaal overwonnen hadden, noch dat beide groepen hetzelfde deden, wel dat er ruimte was voor gezamenlijk optrekken en, vakinhoudelijk, voor wederzijdse inspiratie.

karakterisering van wiskundig modelleren

Mathematisering blijft natuurlijk ook in een wiskundig model de achterliggende aanname; ze is, hoewel verzwegen, in het wiskundig modelleren relatief eenvoudig terug te vinden door het woordgebruik waaronder de 'werkelijkheid' verschijnt.
Wiskundig modelleren is nu:
* De aanname van mathematiseerbaarheid: de aanname dat een object zich laat kennen (en beheersen) aan de hand van een daaraan uitwendig te stellen structuur.
* Het als procedure behandelen van die werkelijkheidsbenadering.
* Het uitbeelden van hetgeen men denk over een object in een wiskundige structuur.

Niet alleen was het wiskundig modelleren de nieuwe en algemenere vorm van toepassen van wiskunde, de Wiskundig Ingenieursopleiding was hierin de opleiding bij uitstek. Het is dus de opleiding par excellence in het maken van de mathematiseerbaarheidsaanname.

10. EPILOOG: ZUIVER- EN TOEPASSINGSGERICHT

Over het nut van wiskunde bestaan zeer uiteenlopende opvattingen, om precies te zijn twee. Volgens de ene leert de wiskunde helder te denken, hetgeen niet alleen het verstand, maar door het verstand ook de samenleving ten goede zou komen. Volgens de andere ligt het nut van de wiskunde in de weergave van de werkelijkheid, cq van een bepaalde situatie. Beide opvattingen spelen hun rol als motief in het onderwijs, in wisselende sterkte en ieder in verschillende historische gestalten. De aandacht ging in deze syllabus speciaal uit naar de rol van de wiskunde in de techniek en de opleiding daartoe. In die opleiding waren beide motieven duidelijk herkenbaar in de visie op wiskunde als basisvak en als hulpwetenschap. Het wiskundig modelleren, en in het bijzonder de Wiskundig Ingenieursopleiding, toont duidelijk dat men met die tegenstelling niet meer uitkomt. Op zijn minst moet toegegeven worden dat wiskunde als hulpwetenschap verzelfstandigd is. Dat zou betekenen dat er twee zelfstandige varianten van het vak wiskunde zijn ontstaan, ware het niet dat wiskunde maar één zaak is.

Dat wiskunde wiskunde is, betekent omgekeerd dat het verhaal van toepassingsgerichte wiskunde-beoefening evenzeer betrekking heeft op "zuivere" wiskunde. Inderdaad, ook daar speelt men heen en weer tussen verstand en werkelijkheid, het is een en dezelfde wiskunde die als een bedrijvige boodschapper tussen beide bemiddelt. Wie nog meent te kunnen uitmaken wat de heenweg is en wat de terugweg, die mag een poging doen te spreken van zuiver- en toepassingsgericht. Wie erover nadenkt zal zich realiseren dat de naamgeving van de richtingen bepaald relatief is en al lang niet meer voorbehouden aan de ene of de andere groepering. Het onderscheid is belangrijk; de naamgeving een kwestie van perspectief.

LITERATUUR

[Beckers 1993] 'Eene onbepaalde Equatie - Een biografie van de mathematicus Jacob de Gelder (1765-1848)', D.J. Beckers, Nijmegen: bij de auteur, 1993.

[Bernal 1963] *The social function of science*, Bernal, Cambridge (Mass.): MIT Press, 1963.

[Biezeno 1914] *De beteekenis der Wiskunde als Hulpwetenschap der Toegepaste Mechanica*, C.B. Biezeno (inaug. rede), Delft: Waltman, 1914.

[Borel 1912] 'Les théories moléculaires et les Mathématiques', Emile Borel, (Conférences faites à l'occasion de l'inauguration du Rice Institute, à Houston), *Revue générale des Sciences* **23** (1912), pp.842-853.

[Boltzmann 1911] 'Model', Ludwig Boltzmann, *The Encyclopædia Brittanica* 11th edition Vol. **XVIII**, Cambridge: Univ. Press, 1911, pp.638-640.

[Burgers 1955] *Terugblik op de hydrodynamica*, J.M Burgers (afscheidscollege 2-11-1955), s.l., s.a.[Delft, TH (Lab Aero en Hydrodynamica), 1955]

[Burgers 1974] *The nonlinear diffusion equation; Asymptotic solutions and statistical problems*, J.M. Burgers, Dordrecht/Boston: Reidel, 1974.

[Dantzig 1947] 'General procedures of empirical science', D. van Dantzig, *Synthese* **5** (1947), pp. 1-15.

[Descartes 1627] *Regulae ad directionem ingenii*, René Descartes (Oorspr. 1627), Heruitg. door G. Le Roy, Paris: Boivin, 1933.

[Dijksterhuis 1950] *De mechanisering van het wereldbeeld*, E.J. Dijksterhuis, Amsterdam: Meulenhoff, 1950; 1980[4].

[Ehrenfest 1911] 'Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik', P. und T. Ehrenfest, *Encyklopa\O"die der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Hrsg. Walther Dyck e.a., Leipzig/Berlin: Teubner, 1898-1935. (Band IV *Mechanik* in 4 Teilbänden, Hrsg. von F. Klein und C.H. Müller, IV.32 = IV-4 Heft 6)

[Epistemological 1981] *Epistemological and social problems of the sciences in the early nineteenth century*, H.N. Jahnke and M. Otte (eds.), Dordrecht etc: Reidel, 1981.

[Fokker 1952] 'De natuurkunde voorheen en thans', A.D. Fokker, *De tijd waarin wij leven* (Speciaal nummer van *De Gids* 1952-II), pp.158-164.

[Fontenelle 1702] *Histoire du renouvellement de l'academie royale des sciences en M.DC.XCIX et les éloges historiques de tous les academiciens mort depuis ce Renouvellement. Avec un discours preliminaire sur l'utilité des Mathematiques et de la Physique*, Bernard de Fontenelle, Paris, 1702/Amsterdam, 1709. Heruitg. in Maurice Roelens, *Fontenelle; Textes choisis 1683-1702*, Paris: Editions Sociales, 1966.

[Gibbs 1902] *Elementary principles in statistical mechanics, Developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*, J. Willard Gibbs, New York: Charles Scribner's Sons /London: Edward Arnold, 1902. (Yale Bicentennial Publications)

[Grabiner 1981] 'Changing attitudes toward mathematical rigor: Lagrange and analysis in the eighteenth and nineteenth century', Judith V. Grabiner, [Epistomological 1981: pp. 311-330].

[Hacking 1990] *The taming of chance*, Ian Hacking, Cambridge: Cambridge UP, 1990.

[Hakfoort 1988] 'De fundamentele spanning in Newtons natuurwetenschap', C. Hakfoort, In: *Wijsgerig perspectief op maatschappij en wetenschap* **29**-1 (1988/89), pp.2-7.

[Hertz 1894] *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt*, Heinrich Hertz, Hrsg. von Ph. Leonard; mit einem Vorworte von H. von Helmholtz, Leipzig: J.A. Barth, 1894 (*Gesammelte Werke von Heinrich Hertz* Band III)

[Husserl 1936] *Die Krisis der europäische Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, Edmund Husserl, in *Philosophia* **I** (1936); repr. ed. E. Ströker, Hamburg: Meiner, 1982.

[Jourdain 1956] *The nature of mathematics*, Philip E.B. Jourdain, 1912; repr. ed. in *The world of mathematics (4 Vols.)*, James R. Newman (ed.), New York: Simon and Schuster, 1956, Vol.I pp. 4-72.

[Kuhn 1979] 'Wiskundige versus experimentele tradities in de ontwikkeling van de natuurwetenschap', Thomas S. Kuhn, *De noodzakelijke spanning; Traditie en vernieuwing in de wetenschap*, id., Meppel: Boom, 1979, pp. 49-94 (Oorspr. Thomas S. Kuhn, *The Essential Tension - Selected Studies in Scientific Tradition and Change*, Chicago: Un. of Chicago Press, 1977).

[Laplace 1814] *Essai philosophique sur les probabilités*, P.-S. de Laplace, Paris, 1814, 1825[2].

[Mauersberger 1988] 'Technik im Umfeld der Naturerkenntnis von Galilei bis Newton', Klaus Mauersberger, in *Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte* **7** (1988) (= *Naturwissenschaftliche Revolution im 17. Jahrhundert* Berlin, 1988) pp. 179-212.

[Mauersberger 1989] 'Descartes' Einfluß auf das technische Denken und die Herausbildung der Technikwissenschaften', K. Mauersberger, in *Descartes und das Problem der wissenschaftlichen Methode*, H.-M. Gerlach und R. Meyer (Hrsg.), Halle (Saale): Martin Luther Universität Halle-Wittenberg (*Wissenschaftliche Beiträge* **7** (1989) *A112*), 1989, pp. 137-144.

[Navier 1823] *Rapport à Monsieur Becquey, conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*, C.L.M.H. Navier, Paris: Imprimerie Royale, 1823[1]; Paris: Carilian-Goeury, 1830[2].

[Proceedings 1954] *Proceedings of a Conference on Training in Applied Mathematics* (held at Columbia University, New York City, 22,23,24 october 1953; sponsored by the American Mathematical Society and the National Research Council). Washington: NRC, 1954.

[Rosenblueth/Wiener 1945] 'The role of models in science', Arturo Rosenblueth and Norbert Wiener, *Philosophy of Science* **XII** (1945), pp.316-321.

[Schubring 1981] 'The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics', Gert Schubring [Social 1981: pp. 111-134]

[Social 1981] *Social history of nineteenth century mathematics*, Herbert Mehrtens, Henk Bos, Ivo Schneider (eds.), Boston etc: Birkhäuser, 1981.

[Stamhuis 1989] *'Cijfers en Aequaties' en 'Kennis der Staatskrachten'; Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw*, Ida H. Stamhuis (diss. VU), Amsterdam: Rodopi, 1989.

[Stamhuis/Knecht 1992] *De met cijfers bedekte negentiende eeuw: toepassing van statistiek en waarschijnlijkheidsrekening in Nederland en Vlaanderen tussen 1840 en 1920*, Ida H. Stamhuis en A. de Knecht-Van Eekelen (red.), Rotterdam: Erasmus Publishing (*GEWINA* **15**-3), 1992.

[Stevin 1955] *The principle works of Simon Stevin*, 5 vols. edited by Ernst Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes, M.G.J. Minnaert, A. Pannekoek. Amsterdam: Swets & Zeitlinger, 1955-1966.

[Struik 1990] *Geschiedenis van de wiskunde*, D.J. Struik, Utrecht: Het Spectrum (Aula Paperback 178), 1990. (Oorspr. *A concise history of mathematics*, New York: Dover, 1948).

[Timman 1952] *De betekenis van de Wiskunde voor het Toegepast Wetenschappelijk Onderzoek*, R. Timman (Inaug rede TH Delft), Delft: Waltman, 1952.

[Tinbergen 1933] *De Konjunktuur*, J. Tinbergen. Amsterdam: De Arbeiderspers, 1933.

[Tinbergen 1936] 'Prae-advies van Prof.dr. J. Tinbergen', J. Tinbergen, in *Prae-adviezen over de vragen: Kan hier te lande, al dan niet na overheidsingrijpen, een verbetering van de binnenlandse conjunctuur intreden, ook zonder verbetering van onze exportpositie? Welke leering kan te aanzien van dit vraagstuk worden getrokken uit de ervaringen van andere landen?*, H.A. Kaag e.a.; Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek, 's Gravenhage: Mart. Nijhoff, 1936, pp.62-108.

[Tinbergen 1938] 'Vertragingsgolven en levensduurgolven', J. Tinbergen, in: *Strijdenskracht door Wetensmacht; Opstellen aangeboden aan S. de Wolff ter gelegenheid van zijn 60e verjaardag*, J. v.d. Wijk e.a.(red.), Amsterdam: Arbeiderspers, 1938, pp. 143-150.

[Tukey 1955] 'Mathematical consultants, computational mathematics and mathematical engineering', J.W. Tukey, *American Mathematical Monthly* **LXII**-8 (Oct. 1955), pp. 565-571.

[Waal 1927] *Van Paciolo tot Stevin; Een bijdrage tot de leer van het boekhouden in de Nederlanden*, P.G.A. de Waal, Roermond: Romen, 1927.

MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.

1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.

1.3 J. Hemelrijk, J. kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek* 1966

1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.

1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.

1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.

1.6b B. Dorhout, J. kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977. 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.

1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.

1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.

1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.

2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.

2.2. L. Dekker, T.J. dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.

3.1. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967

3.2. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968

3.3. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968

4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968

5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.

6. K.K. Koksma. Cursus ALGOL 60. 1969.

7.1 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 1*. 1969.

7.2 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 2*. 1969.

8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.

9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970

9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970

10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970

11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.

12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971

13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971

14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971

15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.

15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.

15.3 P.A. Beentjes. K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.

16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973

16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973

17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.

17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.

17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.

18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Songh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.

19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.

20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.

21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.

22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid*. 1976.

23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.

23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.

24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1975.

25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.

26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.

26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.

27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.

28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.

29.1 J.C. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.

29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.

30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.

31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.

32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.

33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.

34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.

35P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.

36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.

37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.

38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.

38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.

39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.

40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.

41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.

42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.

43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.

44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.

45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.

46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.

46.2 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.

47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.

47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.

47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.

47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.

47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.

47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.

47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.

48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.

48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.

49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.

50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.

51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983

CWI SYLLABI

1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.

2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.

3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.

4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.

5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.

6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.

7 Vacantiecurus 1985: *Variatierekening*. 1985.

8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.

9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.

10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.

11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.

12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.

13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.

14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.

15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.

16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.

17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.

18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.

19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.

20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.

21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.

22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.

23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.

24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.

25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.

26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.

27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.

28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.

29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.

30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.

31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.

32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992*. 1992.

33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.

34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.

35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.

36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.

37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus*. 1994.

38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.